۱۳۲۶

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش منطق ریاضی

عنوان

رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خود ارجاعی

استاد راهنما

آقای دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

آقای دکتر جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

مهدی عابدینی

دی ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

الهی
فضل تو را کران نیست و شکر تو را زبان نیست.
الهی
دانائی ده که از راه نیفتیم و بینائی ده که در چاه نیفتیم.
الهی
دلی ده که در شکر جان بازیم و جانی ده که کار جهان سازیم.
الهی
تحقیقی ده تا از دنیا بیزار شویم و توفیقی ده در دین استوار شویم.
الهی
دلی ده که طاعت افزون کند و توفیق طاعتی که به بهشت رهنمون کند.
الهی
اگر چه گناه من افزون است اما عفو تو از حد بیرون است.
الهی
نگاهدار تا پشیمان نشویم و به راه آر که سرگردان نشویم.
الهی
چون توانستم ندانستم و چون که دانستم نتوانستم.
الهی
می‌بینی و می‌دانی و برآوردن می‌توانی.
الهی
ما را پیراستی چنان که خواستی.

از مناجات نامهٔ خواجه عبداللّه‌انصاری

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوارم

به پاس زحمات بی‌دریغشان

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منّان که دورۀ کارشناسی ارشد را به لطف و یاری او به اتمام رساندم. در طول دوران تحصیل اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. پر واضح است که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات این بزرگواران را جبران نماید.

اما بر خود لازم می‌دانم که از استاد گرانقدرم آقای دکتر صالحی پور به خاطر زحمات بی‌شائبه و حمایتهای بی‌نظیرشان که در سخت‌ترین لحظات تحصیل همواره پشتیبان اینجانب بوده‌اند از صمیم قلب تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از استاد بزرگوار آقای دکتر عیوضلو به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و مساعدت‌های بی‌دریغشان، کمال تشکر و امتنان را دارم. ضمناً از استاد برجسته و گرانقدر جناب آقای دکتر ... که با لطف و عنایت خویش قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، کمال سپاس و امتنان را دارم.

از اساتید و دوستان دیگر از جمله جناب آقای دکتر مددی، آقای دکتر جعفری و آقای دکتر رنجبر که در طول دوران تحصیل مشوق اینجانب بوده‌اند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که همواره یار و حامی اینجانب بوده‌اند و با تحمل مشکلات راه تحصیل را بر من هموار نموده‌اند، نهایت امتنان را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: عابدینی نام: مهدی

عنوان: رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خود ارجاعی

استاد راهنما : آقای دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور: آقای دکتر جعفر صادق عیوضلو

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۳

کلید واژه‌ها: رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس های خودارجاعی

چکیده

مبنای اصلی این پایان نامه مقاله زیر است:

N. S. Yanofsky, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulletine of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386.

در سال ۱۹۰۶ برتراند راسل با انتشار مقاله ای نشان داد همه پارادکس های نظریه مجموعه‌ای شناخته شده، دارای یک شکل مشترک هستند. در سال ۱۹۶۹ ویلیام لاوور[۱] از زبان نظریه رسته‌ها[۲] برای رسیدن به یک نظریه بنیادی و یکپارچه که نه تنها شامل پارادکس های نظریه

[۱] William Lawvere

[۲] Category theory

مجموعه‌ای بلکه شامل پدیده های ناتمامیت نیز گردد، بهره جست. لاوور دقیقاً نشان داد که چگونه رسته های بسته دکارتی برای ارائه دادن یک شکل مشترک از قضیه کانتور در ارتباط با اندازهٔ مجموعه های توانی، پارادکس راسل، قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی و قضیه اول ناتمامیت گودل، استفاده می‌شوند.

در این پایان نامه، با یک روش توصیفی، نظرات لاوور با استفاده از زبان نظریه مجموعه‌ای ارائه و توسعه داده می‌شوند. ضمناً چگونگی ایجاد و تکوین پارادکس های خودارجاعی، ناتمامیت و قضایای نقطه ثابت از قضیه تعمیم یافته کانتور تشریح خواهند شد. همچنین این رویه برای پارادکس دروغگو، پارادکس گرلینگ و ریچارد، مسأله توقف تورینگ، مسأله اُراکل دار $P =?NP$، پارادکس سفر در زمان، گزاره‌های پریخ، پارادکس لُب و قضیه رایس تعمیم داده می‌شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف پارادکس

پارادکس این است که از مقدمه‌هایی که به ظاهر پذیرفتنی می‌نمایند با استدلالی که به ظاهر درست می‌نماید نتیجه‌ای ناپذیرفتنی بدست آید (ر.ک. [۲۸]).

البته مترجمان در ترجمه واژه‌ی پارادکس [1] معادل هایی از قبیل تناقض‌نما، باطل‌نما، معما، خارق اجماع، تعارض در اقوال، تضاد، ناسازه، تنازع و ... را جایگزین نموده‌اند. اما به نظر می‌رسد هیچ یک از آنها معنای دقیق پارادکس را بیان نمی‌کند. شاید به همین جهت است که برخی مترجمان ترجیح می‌دهند خود آن را بدون ترجمه در زبان فارسی بیاورند. همانطور که در بالا ذکر نمودیم، پارادکس عبارت است از بدست آوردن یک جمله‌ی غیر قابل قبول از مقدمات مقبول و قواعد استنتاجی معتبر. به همین دلیل نیز، برای حل پارادکس سعی می‌شود یا در صدق مقدمات و یا در اعتبار قواعد استنتاج خدشه وارد کرده و یا اینکه نتیجه را پذیرفته و تنها توضیح داده شود که چرا غیر قابل قبول جلوه می‌نماید. به عبارتی دیگر، می‌توان پارادکس را به این صورت تعریف نمود: آنچه که تناقض آمیز، باورنکردنی و خلاف انتظار و شهود ماست. یعنی آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است.

البته تنوع و تاریخچه‌ی پارادکس‌ها بسیار فراتر از گنجایش این پایان نامه می‌باشد. پارادکس‌ها در بستر طیف وسیعی از علوم در طول تاریخ حادث گردیده‌اند از جمله منطق، فلسفه، ریاضی، هندسه، اقتصاد، فیزیک و حتی شیمی. در این مختصر ما صرفاً به بیان چند پارادکس تاریخی و چند نمونه از پارادکس‌هایی که خاصیت خودارجاعی دارند پرداخته و به فرمول بندی این پارادکس‌ها بسنده می‌کنیم.

ضمناً پارادکس‌ها فوایدی نیز دارند: از جمله می‌توان به ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای

[1] Paradox

دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید اشاره نمود.

در ادامه چند نمونه‌ی مشهور از پارادکس‌ها را می آوریم و علتی که این پارادکس‌ها ایجاد می‌شوند را شرح می‌دهیم.

پارادکس آرایشگر[2]

این پارادکس به چند شکل مختلف مطرح گردیده است که اغلب دارای یک مفهوم هستند. ما شکل عمومی تر آن را مطرح می‌کنیم. گویند در دهکده‌ای دور افتاده از سیسیل که در پشت کوه‌های سر به فلک کشیده پنهان شده است آرایشگری هست که از ساکنان دهکده تنها ریش کسانی را می تراشد که خود ریش خود را نمی‌تراشند: حالا سؤال این است که تکلیف این آرایشگر با ریش خود چیست؟ ریش خود را خود می‌تراشد یا نمی‌تراشد؟ فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را بتراشد. پس از کسانی است که خودشان ریش خودشان را می‌تراشند اما بنابر تعریفی که از این آرایشگر کردیم او ریش چنین کسانی را نمی‌تراشد. پس نباید ریش خودش را بتراشد. حالا فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را نمی‌تراشد. پس بنا به تعریف چون از کسانی است که ریش خود را نمی‌تراشند پس باید ریش خود را بتراشد. وضع غریبی است. اگر ریش خود را بتراشد ریش خود را نمی‌تراشد و اگر ریش خود را نتراشد ریش خود را می‌تراشد. به اصطلاح این آرایشگر ریش خود را می‌تراشد اگر و تنها اگر ریش خود را نتراشد. و این یک تناقض است. چگونه این تناقض ایجاد شد؟

در این پارادکس دو نکته مندرج است: یکی روانشناختی و دیگری منطقی. نکته‌ی روانشناختی این است که اگر دروغی را با شرح و تفضیل و جزئیات بگوییم بسیاری آن را باور می‌کنند. نکته منطقی اینکه به صرف تعریف نمی‌توان شیئی آفرید که مصداق آن تعریف باشد.

[2] Barber paradox

به همین دلیل وقتی منطق دانان تعریفی از عددی یا مجموعه ای می‌کنند پس از تعریف دو مطلب دیگر را هم ثابت می‌کنند: اول این که چیزی با این تعریف وجود دارد، دوم این که آن چیز موجود منحصر بفرد است. ملاحظه می‌کنیم که پارادکس آرایشگر سیسیلی راه حل ساده‌ای دارد. ابتدا فرض می‌کنیم که بنا به ادعای گوینده چنین آرایشگری وجود دارد. سپس از این فرض به تناقض می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که چنین آرایشگری وجود ندارد. این همان روش برهان خلف است. به طور خلاصه در این پارادکس دو مقدمه داریم:

۱. آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود دارد،

۲. این آرایشگر تنها ریش همه‌ی آن کسانی را می‌تراشد که ریش خود را نمی‌تراشند.

از این دو مقدمه نتیجه می‌گیریم که:

۳. این آرایشگر ریش خود را می‌تراشد و ریش خود را نمی‌تراشد.

«۳» تناقض است و نتیجه نهایی این است که مقدمه‌ی «۱ و ۲» را نقض کنیم و بگوییم:

۴. چنین آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود ندارد.

گاهی پارادکس به دلیل نادرستی استدلال به وجود می‌آید. یعنی مقدمه‌ها، برخلاف پارادکس آرایشگر، ایرادی ندارند اما استدلال ایراد دارد. نمونه‌ای از این گونه، استدلالی است که دمورگان برای اثبات «$1 = 2$» آورده است (ر.ک. [۲۸]). فرض کنید:

۱) $X = 1$

حال دو طرف معادله‌ی فوق را در X ضرب می‌کنیم:

۲) $X^2 = X$

حال از دو طرف عدد یک را کم می‌کنیم:

۳) $X^2 - 1 = X - 1$

می‌دانیم که:

۴) $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$

حال با جاگذاری رابطه‌ی «۴» در «۳» داریم:

۵) $(X+1)(X-1) = X-1$

اکنون طرفین را بر «$X-1$» بخش می‌کنیم:

٦) $(X+1) = 1$

اما از «۱» می‌دانیم که $X = 1$. در «٦» به جای X عدد یک را قرار می‌دهیم:

۷) $2 = 1$

ایراد کار در کجاست؟ استدلال از «۲» شروع شده و به «۷» پایان یافته است. بنابراین اگر ایرادی در کار باشد در یکی از مراحل همین استدلال است. بنابر «۱»، «$X = 1$»، پس «$X - 1 = 0$». در مرحله‌ی «٦» تقسیم طرفین بر «$X - 1$» یعنی تقسیم طرفین معادله بر صفر را انجام داده ایم و این همان کاری است که مجاز نیست. در واقع با تقسیم بر صفر کار را به اعداد بینهایت کشانده و مبهم نموده‌ایم. این یک نمونه از استدلالی است که به ظاهر درست می‌نماید، لکن در حقیقت درست نیست.

نمونه‌ای دیگر از استدلالهای نادرست، پارادکس زنون یا به عبارتی پارادکس نفی حرکت است. (ر. ک. [۲۸]) این گونه پارادکس ها، بر خلاف ظاهر سرگرم کننده‌ی خود، می‌توانند دگرگونی عمیقی در مبانی اندیشه‌ی ما ایجاد کنند و فریاد هشداری باشند تا فریب شعور و شهود متعارف خود را نخوریم و به خصوص در آنچه بدیهی می‌نماید با شک و تردید نگاه کنیم. پارادکسی که اکنون بدان می پردازیم یکی از آن فریادهای هشداری است که منطق و ریاضی و فلسفه را در اوایل قرن بیستم به لرزه درافکند، لرزه ای که هنوز موج آن فرو ننشسته است.

پارادکس راسل[3]

پارادکس راسل از مهمترین پارادکس های نظریه مجموعه‌ها است که توسط ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی برتراند راسل در سال ۱۹۰۱ معرفی شد. این پارادکس نشان می دهد که نظریه طبیعی مجموعه‌های فرگه که بر پایه کارهای جرج کانتور بود، دارای تناقضاتی در درون خودش است. در نظریه طبیعی مجموعه‌ها دو اصل موضوع عمده وجود دارد که عبارت‌اند از اصل موضوع گسترش و اصل موضوع شهودی تجرید. اصل انتزاع بیان می‌کند، اگر $\phi(x)$ خاصیتی در مورد متغیر آزاد x باشد آنگاه $\{x : \phi(x)\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر متناظر با هر خاصیتی نظیر $\phi(x)$، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که در $\phi(x)$ صدق می‌کنند. بدین ترتیب این اصل به ما اجازه می‌دهد بوسیله هر ویژگی دلخواه یک مجموعه را تشکیل دهیم. برتراند راسل بوسیله این پارادکس نشان داد که در نظر گرفتن این اصل در نظریه مجموعه‌های کانتور نظریه‌ای ناسازگار است و نیاز به بازنگری دارد.

وقتی تعدادی از اشیاء را با هم در نظر می‌گیریم و آنها را با عنوان یا صفتی که همه در آن مشترک‌اند مشخص کنیم مجموعه‌ای ساخته‌ایم. شاید چیزی بدیهی تر از این نباشد که بگویی، هر توصیفی یا شرطی[4] مجموعه‌ای را مشخص می‌کند. اینکه هر شرطی مجموعه‌ای می‌سازد حکمی وجودی است. یعنی با هر شرطی مجموعه‌ای بوجود می آید. نظر به اهمیت این حکم، آن را یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه قرار داده و اصل انتزاع[5] نامیده‌اند. بنابر این اصل، برای هر صفتی مجموعه ای وجود دارد که عضوهای آن تنها همان اشیائی هستند که آن صفت را دارند.

اما مجموعه‌ها به اعتباری به دو گروه مجزا تقسیم می‌شوند. توضیح اینکه مجموعه‌ی انسانها خود، انسان نیست، بلکه شیئی مجرد است. همچنین مجموعه‌ی اسب ها خود، اسب

[3] Russell's paradox

[4] condition

[5] axiom of abstraction

نیست. پس این مجموعه ها خود عضو خود نیستند. در واقع اغلب مجموعه‌ها چنین‌اند. مجموعه‌ی اعداد فرد، خود عدد فرد نیست و بنابراین عضو خود نیست. اما مجموعه‌ی مفهوم ها خود یک مفهوم است و عضو این مجموعه است. حال همه‌ی مجموعه هایی مانند مجموعه‌ی انسان ها، مجموعه‌ی اسب ها و مانند آنها را که عضو خود نیستند گرد می آوریم و از آنها یک مجموعه می‌سازیم. اصل انتزاع هم می‌گوید چنین مجموعه‌ای وجود دارد. صفت کلی اعضای این مجموعه هم این است: «مجموعه هایی که عضو خود نیستند».

حال می پرسیم: آیا این مجموعه، عضو خود هست یا نیست. اگر این مجموعه عضو خود باشد – باید ناچار صفت مشترک عضوهای خود را داشته باشد یعنی – باید عضو خود نباشد. و اگر عضو خود نباشد – از آنجایی که صفت عضو خود نبودن، یعنی صفت مشترک عضوهای خود را دارد – باید عضو خود باشد. بنابراین، این مجموعه اگر عضو خود باشد عضو خود نیست و اگر عضو خود نباشد عضو خود هست. و این تناقض است. این مجموعه نه می تواند عضو خود باشد نه می تواند عضو خود نباشد. پس ملاحظه می‌شود شرط «عضو خود نبودن» شرط معقولی نیست. به بیان دیگر باید از اصل انتزاع که می‌گوید متناظر با هر شرطی مجموعه‌ای وجود دارد، صرف نظر نموده و مفهوم دقیق تری از شرط ارائه دهیم.

به بیان دیگر، خاصیت $\phi(x) \equiv x \notin x$ را در مورد مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم. در این صورت مطابق اصل انتزاع $\{x : x \notin x\}$ یک مجموعه است که شامل همه مجموعه هایی است که عضو خودشان نیستند. قرار می‌دهیم $R = \{x : x \notin x\}$. پس $\forall A(A \in R \iff A \notin A)$. هیچ چیز در نظریه مجموعه‌های کانتور و فرگه مانع تعریف چنین مجوعه‌ای نمی شود. مشکل زمانی حادث می‌شود که به خود مجموعه R، به عنوان مجوعه قابل قبول بنگریم و این سوال را در مورد R مطرح کنیم که آیا R عضوی از خودش است یا نه؟

• اگر پاسخ آری دهیم، پس $R \in R$ و لذا بنابر تعریف مجموعه R باید داشته باشیم $R \notin R$ که این تناقض است.

• اگر پاسخ خیر دهیم، پس $R \notin R$ و لذا بنابر تعریف R باید داشته باشیم $R \in R$ که این نیز تناقض است.

این پارادکس نشان می دهد که اصل گسترش وجود مجموعه‌ی $\{x : \phi(x)\}$ برای هر فرمول ϕ معتبر نیست. همچنین این پارادکس اولین عامل برای برانگیختن تلاش ریاضیدانان در جهت اصل موضوعی نمودن نظریه مجموعه‌ها بود. راسل به همراه آلفرد نورث وایتهد[6] سعی نمودند با گسترش نظریه گونه‌ها[7] این پارادکس را حل نمایند. در سال ۱۹۰۸ ارنست زرملو یک دستگاه اصل موضوعی را برای نظریه مجموعه‌ها ارائه داد که از پارادکس های نظریه مجموعه‌ها جلوگیری می کرد. با اصلاح این اصول توسط فرانکل و زرملو در سال ۱۹۲۰ نظریه مجموعه‌های زرملو- فرانکل یا ZFC ایجاد گردید. در ZFC اصل انتزاع وجود ندارد بلکه بیان می کند برای هر مجموعه X و خاصیت ϕ زیر مجموعه Y از X وجود دارد که اعضای آن دارای خاصیت ϕ است . به عبارت دیگر

$$\forall x (x \in Y \iff x \in X \wedge \phi(x))$$

در این صورت مجموعه ناممکن راسل R دیگر یک مجموعه معتبر از نظر ZFC نبوده و اساساً قابل تعریف نخواهد بود. اما ZFC تنها نظریه اصل موضوعی بوجود آمده نبود بلکه نظریه‌های دیگری چون نظریه مجموعه‌های نیومن-گودل-برنیز(NGB) نیز در این راستا بوجود آمدند.

این پارادکس برخلاف پارادکس آرایشگر ناچارمان می‌کند که اصل جاافتاده و پذیرفته

[6] Alfred North Whitehead

[7] Type theory

شده‌ای مانند اصل انتزاع را کنار بگذاریم. به این پارادکس ها به اصطلاح آنتی نومی[8] به معنای ضد اصل می گویند. به پارادکس هایی مانند پارادکس آرایشگر که راه حل منطقی دارند شبه پارادکس[9] می‌گویند. حال به بیان پارادکس دیگری از نوع آنتی نومی می‌پردازیم.

پارادکس دروغگو[10]

ساده ترین بیان این پاردکس این است که گوینده‌ای درباره‌ی خود بگوید: «آنچه می‌گویم دروغ است».

پرسش این است که آیا این گوینده راست می‌گوید یا دروغ می‌گوید. اگر راست بگوید پس اینکه می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند، یعنی دروغ می‌گوید و اگر دروغ می‌گوید پس اینکه خود می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند یعنی راست می‌گوید. پس اگر آنچه می‌گوید راست باشد دروغ است و اگر دروغ باشد راست است.

اهمیت پارادکس راسل در این بود که درک ما را در مورد یکی از بنیادی ترین مفهوم ها یعنی مفهوم مجموعه در معرض شک می‌نهاد و اهمیت این پارادکس در این است که یکی دیگر از مهمترین مفاهیم یعنی مفهوم صدق را به مخاطره می‌افکند. پارادکس دروغگو نیز در نظریه‌ی صدق[11] همان اثر ویران کننده را دارد که پارادکس راسل در نظریه‌ی مجموعه ها. مفهوم صدق و اینکه جمله ها و گفته ها به چه اعتباری صادق‌اند از مباحث اساسی فلسفه و علوم‌اند و پارادکس دروغگو درست همین مفهوم را تا حد تناقض مورد تردید قرار می‌دهد.

برای پارادکس دروغگو راه حل های متعددی پیشنهاد کرده‌اند و می‌کنند و این نشانه‌ی آن است که برای این طبقه از پارادکس ها راه حل قاطعی هنوز نیافته‌ایم و شاید هرگز نیابیم. اما هر

---

[8] antinomy

[9] psudo-paradox

[10] Liar paradox

[11] Semantics

راه‌حلی ما را از نکته‌ی تازه‌ای آگاه می‌کند. حال ما به بیان راه حل راسل با استفاده از اصل دور باطل و همچنین راه حل تارسکی با استفاده از مفهوم فرا زبان می‌پردازیم.

راسل پس از کشف پارادکس مشهور خود، پارادکس های گوناگون دیگری نیز کشف و معرفی کرد و برای حل آنها به خصوص پارادکس خود و پارادکس دروغگو به طرح چند نظریه ریاضی پرداخت. حال صرفنظر از صحت یا سقم این نظریه‌ها به این ایده می‌پردازیم. از نظر فلسفی، راسل بر آن بود که این دو پارادکس منشأ یکسانی دارند و علت وجودی آنها دخالت اصلی است که آن را اصل دور باطل[12] می‌نامید. بیان روشنی از این اصل این است که

هیچ مجموعه‌ای را نمی‌توان با شرطی مشخص کرد که خود آن مجموعه نیز مشمول آن گردد. یا یک مجموعه نباید تنها برحسب خود آن مجموعه قابل تعریف باشد. هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند شامل عضوهایی باشد که تنها بر حسب آن مجموعه قابل تعریف باشند.

راسل و پوانکاره چنین شرط عضویتی را نامستند[13] نامیده‌اند. دورِ باطل وقتی دخالت می‌کند که در تعریف مجموعه، شرط عضویتی به کار بریم که مستقیم یا غیرمستقیم به مجموعه هایی ارجاع می دهد که یکی از آنها همان مجموعه‌ای باشد که می خواهیم مشخص کنیم. شرطی که نه تنها عضوهای یک مجموعه بلکه خود آن مجموعه را نیز دربرگیرد دور باطل است. پارادکس راسل بدلیل دخالت همین اصل بوجود می آید. زیرا شرط عضو خود نبودن را نه تنها به اعضای آن مجموعه بلکه به خود آن نیز تعمیم می‌دهد. پارادکس دروغگو نیز، به خصوص در شکل معروف تاریخی آن همین نقص را دارد. فردی از اهالی کِرِت گفته است:

«همه‌ی کرتی‌ها دروغگو هستند».

[12] Principle of Vicious Circle

[13] impredicative

اگر این را یک سیسیلی درباره‌ی اهالی کرت گفته بود پارادکسی در کار نبود اما از آنجا که گوینده خود اهل کرت است، حکم او درباره‌ی کرتی ها شامل همین هم می‌شود. در اینجا نیز این گفته مشمول همان حکم مجموعه‌ی گفته‌های اهالی کرت می‌شود و این همان دخالت دور باطل در مشخص کردن مجموعه‌ی این گفته هاست.

فرانک رمزی در سال ۱۹۲۵ در مقاله‌ای با به چالش کشیدن این ایده‌ی راسل، پارادکس ها را به دو دسته می‌کند: پارادکس های منطقی که شامل پارادکس های متعدد نظریه‌ی مجموعه ها و مفاهیمی چون مجموعه و عضویت هستند و پارادکس های معنایی یا دلالت شناختی که شامل مفاهیمی چون صدق و کذب و تعریف پذیری هستند. با این تقسیم بندی پارادکس راسل و پارادکس دروغگو متعلق به دو دسته‌ی جدا از هم‌اند و برخلاف نظر راسل بایستی راه حل های جدا از هم داشته باشند.

تارسکی به پیروی از ارسطو می‌گوید جمله وقتی صادق است که امور همان گونه‌ای باشند که آن جمله می‌گوید و وقتی کاذب است که امور از آن گونه‌ای نباشند که می گوید. بنابراین «برف سپید است» وقتی صادق است که برف سپید باشد. تارسکی این حکم را که بسیار ساده به نظر میرسد چنین می‌نویسد:

«برف سپید است» صادق است اگر و تنها اگر برف سپید باشد.

در سمت راست این عبارت جمله‌ای را که اسناد صدق به آن داده‌ایم میان علامت «» گذاشته‌ایم و در سمت چپ، از این علامت بیرون آورده‌ایم. به بیان دیگر در سمت راست جمله را نقل کرده‌ایم و به آن اسناد صدق داده‌ایم و در سمت چپ خود آن را اظهار کرده‌ایم و بکار برده‌ایم. تارسکی با این کار می‌خواهد بگوید وقتی به جمله‌ای اسناد صدق می‌دهیم حکمی درباره‌ی آن به عنوان یک واحد زبانی می‌کنیم و نتیجه‌ی این اسناد این است که خود آن جمله را بکار بریم و تصدیق

کنیم.

وقتی می‌گوییم برف سپید است درباره‌ی دنیای خارج و امور بدان گونه‌ای که هستند سخن می‌گوییم. اما وقتی درباره جمله ای حکم به صدق آن می‌کنیم از زبان کاربردی فاصله می‌گیریم و دیگر نه درباره‌ی جهان بلکه درباره‌ی زبان سخن می‌گوییم. گاهی زبان را برای بحث درباره‌ی جهان یعنی امور بیرون از زبان بکار می‌بریم و گاهی برای بحث درباره‌ی زبان. در کاربرد اول موضوعِ مورد بحث زبان، جهان خارج است یعنی با آن درباره‌ی موضوع های بیرون از زبان سخن می‌گوییم و برای مثال بیان می‌کنیم: برف سپید است و کلاغ سیاه است. این لایه از زبان را که نخستین لایه‌ی کاربرد زبان است زبان موضوعی[14] می‌گوییم و در کاربرد دوم که درباره‌ی زبان حرف می‌زنیم و می‌گوییم :

«برف سپید است» صادق است.

از لایه‌ی نخستین فراتر می‌رویم و درباره‌ی جمله‌های زبان صحبت می‌کنیم. بدین اعتبار این لایه از زبان را فرازبان[15] می‌نامیم. اکنون اگر فرا زبان را موضوع بحث قرار دهیم و درباره‌ی جمله‌های این زبان حکمی صادر کنیم و برای مثال بگوییم:

««برف سپید است» صادق است» صادق است.

از فرا زبان به فرا فرا زبان رفته‌ایم و زبان موضوعی ما نخستین فرازبان شده است. البته می‌توان این رویه را ادامه داد ولی برای دو مرحله‌ی نخست کفایت می‌کند.

سخن تارسکی این است که عبارت «صادق است» یا « کاذب است» متعلق به فرازبان است. نخست بایست زبان موضوعی خود را که با آن درباره‌ی جهان و برف و کلاغ حرف

[14] object language

[15] meta language

می‌زنیم داشته باشیم سپس از این زبان فراتر رویم و در فرا زبان حکم به صدق و کذب جمله‌های آن کنیم. حال پارادکس دروغگو را در نظر می‌گیریم، در پارادکس دروغگو عبارت «دروغ است» را بدون فرا رفتن از زبان موضوعی برای همین زبان به کار برده‌ایم و این کاربردی اشتباه است. با این کار دو لایه‌ی زبان موضوعی و فرا زبان را به هم آمیخته‌ایم و به ناچار دچار تناقض شده‌ایم. بطور خلاصه جمله‌ی

«آنچه می‌گویم دروغ است»

جمله‌ای است که عبارت «دروغ است» در جای درست خود بکار نرفته و جمله از نظر ساختار منطقی نادرست است. نتیجه‌ای که تارسکی از این بحث می گیرد این است که زبان طبیعی بدین اعتبار– اعتبار دلالت شناسی – نارساست[16] و از این رو دلالت شناسی خود را محدود به زبان منطقی و ریاضی می‌کند. دلالت شناسی تارسکی که مبتنی بر سلسله مراتب فرازبان هاست به پایه گذاری نظریه‌ی مدل انجامیده است.

پارادکس بری[17]

این پارادکس که در سال ۱۹۰۶ توسط برتراند راسل بیان شد، منتسب به بری[18] می‌باشد.

«کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف نیست» توصیفی متشکل از ۱۲ کلمه می‌باشد. بنابراین کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف شد، زیرا عبارت بیان شده دارای ۱۲ کلمه است. چون تعداد کلمات متناهی فرض شده‌اند پس تعداد عبارتهای متشکل از ۱۳ کلمه متناهی هستند و از اینرو تعداد اعداد صحیحی که با استفاده از این عبارتها توصیف می‌شود، بنابر اصل لانه

[16] defective

[17] Berry's paradox

[18] G.H. Berry

کبوتری[19] متناهی است. چون تعداد اعداد صحیح نامتناهی است پس اعداد صحیحی وجود خواهد داشت که با استفاده از عبارتهای ۱۳ کلمه‌ای قابل توصیف نخواهد بود، یعنی اعداد صحیحی وجود خواهند داشت که «قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه نیستند». با استفاده از اصل خوش ترتیبی[20]، اگر اعداد صحیحی وجود دارند که خاصیت فوق را ارضا می‌کنند، پس کوچکترین عدد صحیحی که خاصیت مذکور را ارضا می‌کند وجود دارد. بنابراین کوچکترین عدد صحیحی وجود دارد که خاصیت «قابل توصیف نبودن در کمتر از ۱۳ کلمه» را ارضا می‌کنند. یعنی این عدد صحیح با عبارت مذکور تعریف می‌شود. عبارت مذکور شامل ۱۲ کلمه است، پس عدد صحیحی که با استفاده از عبارت فوق توصیف می‌شود کمتر از ۱۳ کلمه دارد و کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه غیر قابل توصیف باشد، نیست و با عبارت فوق توصیف نمی‌شود. این یک پارادکس است: عدد صحیحی که با عبارت فوق توصیف می‌شود بایستی وجود داشته باشد، اما چون عبارت مذکور خودمتناقض[21] است (یعنی هر عدد صحیحی که آن توصیف می‌کند، قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه است)، هیچ عدد صحیحی با آن توصیف نمی‌شود.

می توان صورت دیگری از این پارادکس را بیان کرد: «فرض کنید که x نخستین عددی است که نمی‌تواند بوسیله‌ی هیچ جمله‌ای با کمتر از ۲۰۰ کاراکتر توصیف شود.» با استفاده از جمله‌ی اخیر، چنین عددی را توصیف کردیم.

به عبارتی پارادکس بری شامل توصیف چیزی است که توصیف مذکور شامل تناقض آشکاری با معنای توصیف می‌باشد. این پارادکس در زمره‌ی پارادکس های معنایی بوده و مشابه پارادکس گرلینگ و پارادکس ریچارد می‌باشد که در فصل ۳ در خصوص آنها بحث خواهد شد.

[19] Pigeonhole Principle

[20] well ordering principle

[21] self-contradictory

می‌توان با مشخص نمودن سطوح توصیف از تناقض اجتناب کنیم نظیر پارادکس دروغگو از خانواده پارادکس های معنایی و پارادکس راسل از خانواده پارادکس های منطقی. سطح صفر را چنین در نظر می‌گیریم: «کوچکترین عدد صحیحی که در چنین روشی توصیف می‌شود» فقط در سطوح بالاتر چنین توصیفی پذیرفته می‌شود و توصیفاتشان فقط به سطح زیر یک ارجاع می‌یابد. بنابراین توصیف «کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف است» در سطح صفر پذیرفته نمی‌شود. در سطح یک، این عبارت بدین معنا تفسیر می‌شود که «کوچکترین عدد صحیحی که در سطح صفر در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف نیست» زیرا در سطح صفر توصیف خودش نیست و به صورت خود-ردکردنی[22] نیست.

این پارادکس ممکن است بدون متوسل شدن به توصیف سطوح دیگر قابل حل باشد. اعداد طبیعی می‌توانند توسط ۰ و تابع تالی تعریف شوند.

۰ یک عدد است

۱ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

۲ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

۳ تالی عدد تعریف شده در آخرین سطر بالا است

و همین طور می توان به صورت نامحدود تعریف کرد.

تالی تعریف شده در آخرین سطر صرفاً یک توصیف ۱۰ کلمه‌ای است. برای مثال، ۲۴ با این روش توسط سطری که بدنبال تعریف ۲۳ می آید، تعریف می‌شود. در حالت کلی، هر عدد طبیعی با این روش توسط عبارتی که کمتر از ۱۳ کلمه دارد توصیف می‌شود. پس به منظوردرک توصیف بری، کوچکترین کلمه‌ای که بتوان در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف کرد، وجود نخواهد داشت. بنابراین عددی که هم قابل توصیف و هم غیر قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه باشد،

[22] self-refuting

وجود ندارد. سطح «قابل توصیف بودن» در عبارت بری، وابسته به متن خواهد بود. برای مثال وقتی سطح ۲ یا سطح ۲۳ را بیان می‌کنیم، فقط در متن شرح و توصیفشان قابل درک خواهد بود.

آیا «کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از صد حرف فارسی نمایش داد» وجود دارد؟ چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی و تعداد حروف فارسی متناهی است پس عددی وجود خواهد داشت که نمی‌توان آن را با عبارتی شامل کمتر از صد حرف فارسی تعریف کرد. بنا به اصل خوش ترتیبی در اعداد طبیعی، کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از صد حرف فارسی نمایش داد وجود دارد. اما عبارت فوق که بین دو نماد « و » قرار دارد کمتر از صد حرف دارد، یعنی عدد ارائه شده با کمتر از صد حرف فارسی تعریف شد!

پارادکس بری به صورتهایی که بیان گردید بخاطر ابهام سیستمی در کلماتی مانند «توصیف پذیر»، «تعریف پذیر»، «ارضاپذیر»، «قابل نامگذاری» و ... ایجاد گردیده است. کلماتی از این نوع منجر به دورباطلی سفسطه آمیز می‌شوند. به منظور حل چنین پارادکس هایی بایستی دقیقاً تعیین نمود مواردی که استفاده از زبان موجب اشتباه می‌شود و محدودیت هایی را جهت اجتناب از این موارد فراهم آوریم. پارادکس هایی از این خانواده را می‌توان با ترکیب لایه های معانی در زبان حل نمود. کلماتی با این ابهام سیستمی ممکن است اندیس گذاری شوند که دلالت بر این امر دارد که معنای یک سطح مقدم بر دیگری فرض شده است. «عددی که در کمتر از یازده کلمه قابل تعریف نباشد» ممکن است در این طرح در کمتر یازده کلمه قابل تعریف باشد.

ضمناً با استفاده از برنامه ها و برهان های با طول کراندار، ممکن است عبارت شبیه پارادکس بری را در زبان صوری ریاضی بسازیم، که گریگوری چایتین[23] موفق به این امر گردید. (ر.ک. [۷])

گودل از پارادکس دروغگو الهام گرفت. در واقع جوهر قضیه‌ی تاریخی او همان پارادکس

[23] Gregory Chaitin

دروغگو است که از زمان یونان باستان شناخته شده بود. اگر در پارادکس دروغگو (من درست نیستم) عبارت «درست» را با «اثبات پذیر» تعویض نماییم، در این حالت یک پارادکس نخواهیم داشت. زیرا جمله‌ی «من اثبات پذیر نیستم» یک تناقض نیست. چرا؟ چون اگر نادرست باشد باید «اثبات پذیر» باشد که امکان ندارد. پس این جمله درست بوده و از شق اخیر هیچ تناقضی حاصل نمی‌شود. این جمله درست است اما نمی توان آن را اثبات نمود. اما برای اینکه بتوان این را بعنوان یک قضیه‌ی ریاضی در نظر گرفت باید به یک زبان صوری ترجمه شود. در زبانهای محاوره‌ای چیزی بنام ضمیر داریم و در نتیجه جملات می‌توانند درباره خودشان صحبت کنند. آیا در ریاضیات نیز می توان جمله‌ای نوشت که راجع به خودش صحبت کند؟

کار نبوغ آمیز گودل همین بود. او این جمله را به شکل صوری درآورد و بطور دقیق نشان داد که اگر یک زبان صوری داشته باشیم به طوری که با استفاده از آن زبان بتوان درباره‌ی اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب صحبت کرد آنگاه می‌توان جمله‌ی «من اثبات ناپذیرم» را به این زبان ترجمه کرد. با توجه به اینکه هر دستگاه صوری که بخواهد کل ریاضیات را پوشش دهد خود بخود شامل اعداد طبیعی و اعمال مربوط به آن خواهد بود، پس ترجمه صوری جمله‌ی «من اثبات ناپذیرم» یکی از گزاره های آن دستگاه خواهد بود. بنابراین در آن دستگاه صوری گزاره‌ای خواهیم داشت که درست است اما اثبات پذیر نیست. این دقیقاً یک جواب منفی برای برنامه صورتگرایی هیلبرت بود. در ضمن قضایای ناتمامیت دیگری نیز با الهام از پارادکس بری بوجود آمده‌اند که در آنها پیچیدگی برنامه‌های کامپیوتری برای ایجاد اعداد طبیعی مورد توجه هستند. با روش اخیر می‌توان به ناتمامیت ریاضیات بصورت خیلی راحتتر دست یافت.

پارادکس کواین [24]

[24] Quine's paradox

این پارادکس مرتبط با ارزش های درستی است که منتسب به کواین[25] است. پارادکس کواین با پارادکس دروغگو مرتبط است. این پارادکس نشان می‌دهد یک عبارت می‌تواند پارادکسی باشد حتی اگر خودارجاعی نبوده و از ضمیر اشاره استفاده نکند(یعنی صراحتاً به خودش ارجاع نیابد). پارادکس می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

«منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود» منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود.

اگر پارادکس واضح نباشد، می توان آن را در دو قسمت بیان نمود:

آن = منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود

نقل قول خودش = «منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود»

آن بر نقل قول خودش ملحق می‌شود = «منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود» منجر به تناقض می‌شود هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود.

بدین ترتیب، مجدداً توصیف این پارادکس را در نظر گرفته و ادعا می‌کنیم که عبارت فوق غلط است. به عبارت دیگر، جمله نتیجه می‌دهد که آن غلط است، که آن هم پارادکس است چون اگر آن غلط باشد، آنچه آن بیان می‌کند در حقیقت درست خواهد بود. به این امر توجه می‌کنیم که آنچه نقل قول شده رشته‌ای از کلمات است، در حالی که آنچه منجر به تناقض می‌شود یک گزاره است.

پارادکس دروغگو(«این جمله غلط است»، یا «جمله‌ی بعدی درست است و جمله قبلی غلط است») در واقع اشکالات اساسی در تخصیص ارزش درستی حتی به جملات ساده را شرح می‌دهد. همانطور که قبلاً بیان گردید بسیاری از فیلسوفان جهت شرح پارادکس دروغگو تلاش نمودند و نهایتاً مشکل را در واژه‌ی «این» یافتند که نوعی خودارجاعی است. ساختار کواین شرح

[25] W. Quine

می‌دهد که پارادکس هایی از این نوع مستقلاً از چنین خودارجاعی مستقیم نشأت می‌گیرند. در واقع، هیچ روش کلی برای حذف این پارادکس های بظاهر فلج کننده زبان نداریم. هر سیستمی بمانند زبان فارسی که شامل موجودیت هایی نظیر کلمات و جملات است که می‌تواند با بکارگیری کلمات خودش منجر به چنین پاراکسی گردد.

پارادکس یابلو[26]

نمونه‌ای از پارادکس دروغگو، سخن سفسطه آمیزی به این شکل است که اولاً دوری بوده و در ثانی به صورت غیر مستقیم خودارجاعی است:

حمید: «آنچه سعید می‌گوید غلط است.»

سعید: «آنچه حمید می‌گوید درست است.»

این پارادکس توسط آلبرت ساکسونی در قرون وسطی طرح گردیده است و اصطلاحاً پارادکس دور نامیده می‌شود. البته می‌توان آن را به حلقه‌ی طولانی تری تعمیم داد:

(S_1) جمله‌ی S_2 غلط است.

(S_2) جمله‌ی S_3 غلط است.

(S_3) جمله‌ی S_4 غلط است.

$\vdots$

(S_n) جمله‌ی S_1 درست است.

این جملات به صورت متناوب درست و غلط خواهند بود: $\ldots TFTF$ یا $\ldots FTFT$ زیرا S_1 درست است اگر S_n درست باشد، و غلط است اگر S_n غلط باشد. اگر تعداد nها زوج باشد پارادکس ایجاد می‌شود زیرا در این حالت S_1 تا S_n ارزش درستی متفاوتی خواهند گرفت.

[26] Yablo's Paradox

پارادکس استفان یابلو[27] در سال ۱۹۹۳ منتشر گردید که شامل دنباله‌ای نامتناهی از جملات است:

(Y_1) همه‌ی جملات بعدی $(Y_2, Y_3, \ldots)$ غلط هستند.

(Y_2) همه‌ی جملات بعدی $(Y_3, Y_4, \ldots)$ غلط هستند.

(Y_3) همه‌ی جملات بعدی $(Y_4, Y_5, \ldots)$ غلط هستند.

$\vdots$

(Y_n) همه‌ی جملات بعدی $(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots)$ غلط هستند.

$\vdots$

فرض کنید Y_1 درست باشد. پس همه‌ی جملات بعدی یعنی $(Y_2, Y_3, \ldots)$ غلط اند. اگر Y_2 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 2$ درست است و این تناقض است. همچنین اگر Y_1 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 1$ درست است. ولی جملات بعد از Y_n یعنی $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ همگی غلط اند. اگر Y_{n+1} غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_m که $m > n+1$ درست است و این تناقض است.

یابلو ادعا نمود که برخلاف انواع پارادکس دروغگو، این پارادکس شامل خودارجاعی نیست، زیرا هر جمله راجع به جملات بعدی است نه در خصوص خودش. اما هر جمله به نظر می‌رسد به صورت ضمنی خودارجاعی باشد زیرا عبارت «همه‌ی جملات بعدی» در هر مورد به این صورت «همه‌ی جملات بعد از این» فهمیده می‌شود. یابلو واقعاً به جملات بعدی را توسط «$\forall k > n$» ارجاع می‌دهد، که n اندیس فعلی برای Y است، اما خودارجاعی هنوز به صورت ضمنی محتمل است. اما خواه خودارجاع باشد یا نه، ما بوضوح یک پارادکس داریم.

[27] Stephen Yablo

پارادکس کوری [28]

پارادکس کوری، پارادکسی است که در نظریه‌ی ساده مجموعه‌ها یا منطق مقدماتی رخ می‌دهد و در واقع مشتقی است از یک عبارت دلخواه که از یک عبارت خودارجاعی و ظاهراً از قواعد استنتاج منطقی تعریف می‌شود. این پارادکس منتسب به یکی از منطق دانان بنام هاسکل کوری[29] است. با استفاده از عبارت خودارجاعی S، «اگر S درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است». بنظر میرسد که می‌توان نتیجه گیری کرد که پاریس پایتخت ایتالیا است.

فرض کنید S درست باشد و قرار دهید:

۱) S درست است.

از ۱ نتیجه می‌شود:

۲) S

از ۲ با تعریف S بدست می‌آوریم:

۳) اگر S درست باشد آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است.

از ۱ و ۳ بنابر قاعده‌ی وضع مقدم[30] نتیجه می‌گیریم که

۴) پاریس پایتخت ایتالیا است.

چون عبارت (۴) را با فرض (۱) بدست آوردیم پس (۴) $\rightarrow$ (۱) درست است. بنابراین

۵) اگر S درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است.

از ۵ با استفاده از تعریف S نتیجه می‌شود:

٦) S

از ٦ بدست می‌آید:

---

[28] Curry's Paradox

[29] Haskell Curry

[30] modus ponens

۷) S درست است.

از ۵ و ۷ با استفاده از قاعده‌ی وضع مقدم داریم:

۸) پاریس پایتخت ایتالیا است.

حال اگر S_2 را قرار دهیم: «اگر S_2 درست باشد، آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا نیست» به صورت مشابه، اثبات می‌شود که پاریس پایتخت ایتالیا نیست و اگر نتایج حاصل از این دو بحث را با هم مقایسه نماییم، یک تناقض بر پایه‌ی مفروضات داریم.

در حقیقت، هر عبارتی که درست یا غلط باشد، ممکن است در بحث فوق بجای «پاریس پایتخت ایتالیا است» جایگزین شود. حتی می توان یک تناقض را در آن جایگزین نماییم. ضمناً پارادکس اجتناب پذیر است اگر بجای درستی، اثبات پذیر جایگزین شود. چون از ٦ به ۷ رد می‌شود.(ر.ک. [۵])

به عنوان مثالی دیگر این جمله را در نظر بگیرید: «اگر این جمله درست باشد، فردا دنیا به اتمام خواهد رسید.» پس با توجه به ماهیت ادعای شرطی و بدون اعتقاد به اینکه «فردا دنیا به اتمام خواهد رسید»، بنظر میرسد که بایستی عبارت فوق را پذیرفته و نتیجه بگیریم که فردا دنیا به اتمام خواهد رسید. پارادکس کوری از فرض عبارت شرطی حاصل می‌شود که به درستی خودش ارجاع می‌یابد.

همین مفهوم را می‌توان در نظریه مجموعه ها داشت. می‌توان هر عبارت منطقی Y را از وجود مجموعه‌ی $X = \{x|(x \in x) \to Y\}$ اثبات نمود:

۱) از تعریف X داریم: $(X \in X) \Leftrightarrow ((X \in X) \to Y$،

۲) از ۱ داریم: $(X \in X) \to ((X \in X) \to Y)$،

۳) از ۲ و ادغام داریم: $(X \in X) \to Y$،

۴) از ۱ داریم: $((X \in X) \to Y) \to (X \in X)$،

۵) از ۳ و ۴ با قاعده‌ی وضع مقدم داریم: $X \in X$،

٦) از ۳ و ۵ با قاعده‌ی وضع مقدم داریم: Y.

در واقع بدین ترتیب، نوع خاصی از پارادکس راسل محقق می‌شود، ولی از آن پارادکس از یک دیدگاه مهم کلی‌تر است. برخی پیشنهادها برای رهاسازی نظریه مجموعه‌ها از تناقض سعی بر غلبه بر پارادکس راسل داشته‌اند نه با محدود کردن اصل انتزاع بلکه با محدود ساختن قواعد منطق بطوریکه طبیعت متناقض مجموعه‌ی همه مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند را متحمل شود. این استدلال نشان می‌دهد که هدف مذکور آنچنان ساده نیست چون که ما فقط یک تناقض نداریم بلکه در حقیقت یک جمله‌ی دلخواه داده شده را بدون استفاده از تمام امکانات منطق گزاره‌ها نشان دادیم.

همین پارادکس را به زبان صوری نیز می‌توان بیان نمود. Y را گزاره‌ای مدنظر گیرید که می‌خواهیم اثبات کنیم. همچنین X را عبارتی قرار دهید که شرح می‌دهد Y از درستی X نتیجه می‌شود. به صورت ریاضی یعنی $X = (X \to Y)$. ملاحظه می‌کنیم که X با استفاده از خودش تعریف شده است. برهان به این شکل است:

۱) از قاعده تکرار فرض داریم: $X \to X$،

۲) با استفاده از فرض و جانشینی X داریم: $X \to (X \to Y)$،

۳) با استفاده از قاعده ادغام از ۲ داریم: $X \to Y$،

۴) با جانشینی ۳ و با توجه به فرض $X = X \to Y$ داریم: X،

۵) با استفاده از قاعده‌ی وضع مقدم از ۳ و ۴ داریم: Y.

پارادکس ریچارد[31]

پارادکس ریچارد یک پارادکس معنایی آنتی‌نومی در زبان طبیعی است که توسط ریاضیدان

[31] Richard's paradox

فرانسوی جولیوس ریچارد[32] در سال ۱۹۰۵ ارائه گردید. بیان اصلی این پارادکس ارتباط مباحث قطری کانتور با شمارش پذیری مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

این پارادکس از این نکته نشأت می‌گیرد که برخی از عبارات معین در زبان طبیعی صراحتاً اعداد حقیقی را تعریف می‌کنند در حالیکه سایر عبارات زبان طبیعی چنین تعریفی را ارائه نمی‌کنند. به عنوان مثال، «عدد حقیقی که قسمت صحیح‌اش ۱۷ بوده و n امین رقم اعشاری‌اش ۰ باشد اگر n فرد باشد و در غیر این صورت ۱ باشد» عدد حقیقی ...۱۷/۱۰۱۰۱۰۱۰۱ را توصیف می‌کند، در حالی که عبارت «تهران پایتخت ایران است» توصیفی از یک عدد حقیقی نیست.

بنابراین در زبان طبیعی لیست نامتناهی از عبارات موجود است که صراحتاً اعداد حقیقی را تعریف می‌کنند. لیست مذکور را می‌توان با استفاده از ترتیب الفبایی معمول مرتب نمود. این لیست، لیست نامتناهی از اعداد حقیقی متناظر را نتیجه می‌دهد نظیر $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$.

حال عدد حقیقی r را به این صورت تعریف می‌کنیم: «قسمت صحیح آن صفر بوده و n امین رقم اعشاری r یک می‌باشد، اگر n امین رقم اعشاری r_n یک نباشد و در غیر این صورت nامین رقم اعشاری r دو می‌باشد».

پاراگراف قبلی عبارتی در زبان طبیعی را بیان می‌کند که صراحتاً عدد حقیقی r را تعریف می‌کند. بنابراین r بایستی یکی از اعداد r_n باشد. با وجود اینکه r ساخته شد ولی با هیچ r_n ای برابر نیست و این تناقض است.

[32] Jules Richard

فصل ۲

مباحث مقدماتی

در سال ۱۹۶۹ ویلیام لاوور[1] مقاله‌ای تحت عنوان استدلالهای قطری و رسته های دکارتی بسته[۱۵]، در مورد چگونگی نمایش بسیاری از پارادکس های کلاسیک و قضایای ناتمامیت در یک مدل رسته ای نگاشت. وی از زبان نظریه رسته ها (رسته های بسته دکارتی خاص) جهت توصیف این نظام بهره جست. لاوور در مقاله‌ی مذکور نشان داد که در رسته‌های بسته‌ی دکارتی که برخی شرایط معین را ارضا می کنند، پدیده های پارادکسی می‌توانند رخ دهند. وی در ادامه با نمایش مثالهای ذیل به شرح این طرح پرداخت :

۱) قضیه‌ی کانتور که $\mathbb{N} \lneqq \mathcal{P}(\mathbb{N})$،

۲) پارادکس راسل،

۳) تعریف ناپذیری ارضاپذیری،

۴) قضیه‌ی تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی،

۵) قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل.

در راستای این امر چندین مقاله از جمله [۱۱]،[۲۱]،[۲۳]،[۲۴] نگاشته شدند ولی متاسفانه مقاله لاوور در بین متخصصین نظریه رسته ها و نیز غیر متخصصین مورد بی مهری قرار گرفت. لاوور و شانول[2] این نظرات را در بخش ۲۹ کتابشان [۱۷] مورد تجدید نظر قرار دادند. اخیراً لاوور و رابرت رزبروگ[3] کتابی تحت عنوان **مجموعه ها برای ریاضیات**[۱۶] منتشر نمودند که در صفحاتی از این کتاب به طرح مذکور پرداخته شده است.

در ادامه مباحث ویلیام لاوور، نشان می‌دهیم که بسیاری از پارادکس های خودارجاعی، قضایای ناتمامیت وقضایای نقطه ثابت از طرح ساده یکسانی نتیجه می شوند. ما این تشابهات

William Lawvere[1]

Schanuel[2]

Rosebrugh[3]

را با مطرح نمودن چگونگی ارتباط این ساختارهای ساده با پارادکس های معنایی به نمایش می گذاریم و همچنین شرح خواهیم داد که چگونه این تشابهات منجر به استدلالهای قطری و قضایای نقطه ثابت در منطق، نظریه‌ی محاسبه، نظریه‌ی پیچیدگی و نظریه‌ی زبان های صوری می‌شوند.

هدفمان در این پایان نامه همچون [۲۷] قابل دسترس کردن این نتایج شگفت انگیز برای مخاطبان بیشتر است. در راستای این هدف مجدداً قضایای لاوور را در اینجا بدین منظور بیان می‌کنیم. ولی بجای رسته ها، از مجموعه‌ها و توابع استفاده می‌کنیم. در این پایان نامه، قضایای مهم و برهانهایشان یک روند خودآموزی دارند. یکی از قضایا تعمیم داده شده و موارد متفاوتی از نتایجش بیان می‌شوند. برای نشان دادن فراگیر بودن قضایا، مثالهایی از حوزه های مختلف منطق و علوم نظری کامپیوتر ارائه می‌دهیم.

به صورت کلاسیک، کانتور اثبات نمود که هیچ تابع پوشایی $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ موجود نیست، که درآن $2^{\mathbb{N}}$ مجموعه‌ی توابع از $\mathbb{N}$ به $2 = \{0, 1\}$ است. کلاس $2^{\mathbb{N}}$ مجموعه‌ای از توابع مشخصه روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ است که با مجموعه توانی $\mathbb{N}$ هم عدد است. قضیه کانتور را برای نشان دادن این امر که برای هر مجموعه‌ی T، تابع پوشایی $T \to 2^T \sim \mathcal{P}(T)$ موجود نیست، می‌توان تعمیم داد. همچنین همان قضیه برای مجموعه های دیگری علاوه بر 2 ، نظیر $3 = \{0, 1, 2\}$ یا $23 = \{0, 1, 2, ..., 21, 22\}$ نیز صادق است. قضیه برای $1 = \{0\}$ درست نیست.

در حالت کلی، می‌توانیم 2 را با یک مجموعه Y دلخواه غیرتباهیده جایگزین کنیم. در نتیجه این تعمیم، گزاره اساسی قضیه کانتور بطور کلی بیان می‌کند که اگر Y غیرتباهیده باشد آنگاه تابع پوشایی از T به Y^T موجود نیست، به طوری که Y^T مجموعه توابع از T به Y است. مجموعه‌ی Y می‌تواند به عنوان مجموعه ممکن ارزش درستی یا خواص اعضای T تلقی گردد. ناتباهیده بودن بدین معنی است که اشیای Y می‌توانند با هم مبادله گردند یا تابع α از Y به Y

بدون هیچ نقطه ثابتی موجود باشد(نقطه ثابت یعنی y عضوی از Y به طوری که $\alpha(y) = y$).

ما قبل از اینکه به توابع $\hat{f} : T \to Y^T$ توجه کنیم، به معادل آن یعنی توابع $f : T \times T \to Y$ می‌پردازیم. هر تابع $\hat{f}$ می‌تواند به تابع f تبدیل شود به طوری که $f(t, t') = \hat{f}(t')(t) \in Y$. بیان پوشا نبودن $\hat{f}$ مشابه موجود بودن $g(-) \in Y^T$ است، به طوری که برای هر $t' \in T$ تابع $\hat{f}(t') = f(-, t') : T \to Y$ با تابع $g(-) : T \to Y$ یکسان نیست. به عبارت دیگر یک عضو t در T موجود است به طوری که $g(t) \neq f(t, t')$. تابع $g : T \to Y$ را قابل نمایش با t_0 خواهیم خواند اگر $g(-) = f(-, t_0)$. بنابراین اگر $\hat{f}$ پوشا نباشد آنگاه یک $g(-) \in Y^T$ موجود است که با هیچ عضو $t \in T$ قابل نمایش نیست.

به صورت فیلسوفانه، این قضیه کانتور تعمیم یافته، بیان می‌کند که ارزشهای درستی یا خواص اعضای T جزئی نیستند و روشی موجود نیست که یک مجموعه T از اشیاء در رابطه با راستگویی یا خواصشان بتواند توصیف یا صحبت کند. به عبارت دیگر محدودیت باید به گونه‌ای باشد که T خواص خود را از دست ندهد. پارادکس دروغگو نخستین مثال سه هزار ساله است که نشان می‌دهد زبانهای طبیعی درباره درستی جملات خودشان صحبت نمی‌کنند. پارادکس راسل نشان می‌دهد که نظریه طبیعی مجموعه‌ها، به صورت ذاتی ناقص است زیرا مجموعه‌ها می‌توانند در ارتباط با خواصشان از جمله عضویت صحبت کنند. نتایج ناتمامیت گودل نشان می‌دهد که علم حساب نمی‌تواند به صورت کامل در رابطه با اثبات پذیری خودش صحبت کند. مسأله توقف تورینگ نشان می دهد که کامپیوترها نمی توانند به صورت کامل در ارتباط با خاصیت کامپیوتری که توقف خواهد نمود و یا در حلقه بی‌نهایت (دور بی پایان) خواهد افتاد، بحث کنند. تمام این نمونه‌های متفاوت حقیقتاً یک مطلب را بیان می‌کنند: اشیاء وقتی با خواصشان سروکار دارند، موجبات زحمت و دردسر را فراهم می‌آورند. توجه کنید که نظرمان تلاش به منظور ایجاد یک صورتگرایی(صوری سازی) ساده است بطوریکه تمامی این نظرات گوناگون را توصیف نماید.

بهترین بخش این طرح واحد، این است که نشان می‌دهد آنها حقیقتاً پارادکس نیستند، بلکه محدودیت های موجودند. پارادکس‌ها نشان می دهند که تخطی از این محدودیت ها، به سیستم ناسازگار و بی‌ثباتی منجر خواهد شد. پارادکس دروغگو نشان می دهد اگر به زبان طبیعی اجازه دهید در ارتباط با درستی جملات خودش صحبت کند آنگاه به تناقضاتی در زبانهای طبیعی منجر خواهد شد. پارادکس راسل بیان می‌کند که اگر اجازه دهیم بدون اعمال محدودیت ها در رابطه با هر مجموعه‌ای صحبت شود، تناقضی در نظریه مجموعه‌ها ایجاد خواهد شد. این مطلب دقیقاً توسط قضیه تارسکی در رابطه با درستی در سیستمهای صوری بیان شده است. طرح ما، محدودیت‌های ذاتی تمام این سیستمها را ارائه می‌کند. ساختار g به صورت شهودی، محدودیتی است که سیستمتان (f) نمی‌تواند با آن سروکار داشته باشد. اگر سیستم با g سروکار داشته باشد، آنگاه تناقضی ایجاد خواهد شد (نقطه ثابت).

عکس نقیض قضیه کانتور بیان می‌کند اکر یک نگاشت پوشا از $T \to Y^T$ موجود باشد، آنگاه Y بایستی تباهیده باشد. یعنی هر نگاشتی از Y به Y بایستی دارای نقطه ثابتی باشد. به عبارتی دیگر، اگر T بتواند خواص خودش را توصیف کند آنگاه Y بایستی به صورت شهودی ناقص باشد. این تباهیدگی روشی برای ایجاد قضایای نقطه ثابت است.

فصل سوم پایاننامه، قضیه اصلی لاوور و تعدادی از تعمیم‌هایش را بیان می‌کند. فصل چهارم پایاننامه، مثالهای متنوعی را در بر می‌گیرد. این فصل با بیان پارادکس های کلاسیک شروع شده و با ارائه تعدادی پارادکس معنایی ادامه می‌یابد. پس از آن به مثالهایی در زمینه‌ی نظریه‌ی علوم کامپیوتر پرداخته خواهد شد. از جمله مباحث این فصل می‌توان به بررسی قضیه‌ی کانتور، پارادکس راسل، پارادکس گرلینگ[4]، پارادکس دروغگو، پارادکس ریچارد، مسأله توقف تورینگ، اُراکل B که $P^B \neq NP^B$ و پارادکس سفر در زمان اشاره نمود.

[4] Grelling's paradox

بخش پنجم پایاننامه، عکس نقیض قضیه اصلی و تعمیم هایش را بیان می‌کند. در ادامه‌ی این فصل ، مثالها و کاربردهایی از عکس نقیض قضیه اصلی ارائه خواهد شد. از جمله‌ی این مباحث می‌توان به نخستین قضیه ناتمامیت گودل، قضیه ناتمامیت گودل – راسر، قضیه تارسکی، گزاره های پَریخ[5]، پارادکس لُب[6]، قضیه رایس[7] و ماشینهای خودمولد وان نیومن اشاره نمود. در فصل ششم، پایان نامه را با نیم نگاهی به زمینه ادامه کار در آینده بخصوص در حوزه های مختلف علوم ریاضی و کامپیوتر به اتمام خواهیم رساند. همچنین نمونه‌هایی از محدودیت ها و قضایای نقطه ثابت که ممکن است در این طرح بیان شود را لیست نموده‌ایم.

ما این فصل را با بیان اثبات اصلی کانتور از قضیه‌ی قطری به پایان می‌رسانیم. این برهان از کتاب شائوگان لاوین[8] [۱۴] برگرفته شده است.

این اثبات نه تنها به دلیل سادگی آن قابل تأمل به نظر می‌رسد بلکه به دلیل اصولی که در آن بکار گرفته شده است، می‌تواند به عنوان قضیه کلی بسط داده شود. مثلاً در آن توانهای مجموعه های خوش‌تعریف هیچ ماکزیممی ندارند و یا اینکه آن مجموعه برای هر مجموعه L داده شده M دیگری را می‌تواند در کنار آن جایگزین کند که بزرگتر از توان L است.

مثلاً فرض کنید L یک پیوستار خطی باشد، مثل مجموعه‌ی تمامی اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ و کوچکتر یا مساوی ۱. فرض کنید M کلاس همه‌ی توابع تک ارزشی $f(x)$ باشد که فقط دو مقدار ۰ یا ۱ را می‌گیرند، که در آن x مقادیر حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ و کوچکتر یا مساوی ۱ را اختیار می‌کند.

---

[5] Parikh sentences

[6] Lob's paradox

[7] Rice's theorem

[8] Shaughan Lavine

ولی M همتوان L نیست. چون اگر M می‌توانست در یک تناظر یک به یک توسط متغیر z (از L) قرار بگیرد. پس M می‌توانست به عنوان یک تابع تک ارزشی $\phi(x, z)$ از دو متغیر x و z قلمداد شود، طوری که با هر جایگذاری z یک عضو $f(x) = \phi(x, z)$ از M بدست می آمد و بر عکس، هر عضو $f(x)$ از M می‌توانست با جایگذاری یک z مناسب در $\phi(x, y)$ بدست آید. به هر حال، این امر منجر به تناقض خواهد شد.

چون که اگر $g(x)$ تابع تک ارزشی باشد که روی x مقادیر ۰ و ۱ را می‌گیرد، طوری که متفاوت با $\phi(x, z)$ باشد،آنگاه از طرفی $g(x)$ هم عضو M است و از طرف دیگر نمی‌تواند از هیچ $\phi(x, z)$ای برای مثلاً $z = z_0$ بدست آید، زیرا که $\phi(z_0, z_0)$ متفاوت از $g(z_0)$ می‌باشد.

فصل ۳

قضیه کانتور و تعمیم آن

۱.۳ قضیه کانتور

این فصل را با بیان مطالب پایه‌ای در رابطه با قضایای کانتور آغاز می‌کنیم. از لحاظ آموزشی، منطقی است که برای لحظه‌ای مطالب آغازین فصل بعد را مدنظر قرار دهیم که برهان نسخه‌ی آشناتر و ملموس تر قضیه کانتور ($\mathbb{N} \lneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$) و پارادکس نظریه مجموعه‌ای راسل را یادآوری می‌کند. حال قضیه‌ی اصلی کانتور را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱ (قضیه کانتور)

اگر Y یک مجموعه و تابع $\alpha : Y \to Y$ بدون نقطه ثابتی ($\forall y \in Y : \alpha(y) \neq y$) موجود باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی T و هر تابع $f : T \times T \to Y$، تابعی مانند $g : T \to Y$ موجود است به طوری که قابل نمایش با f نیست، یعنی برای هر $t \in T$ داریم $g(-) \neq f(-, t)$.

برهان. فرض کنیم Y یک مجموعه بوده و $\alpha : Y \to Y$ تابعی بدون نقاط ثابت باشد. تابع $\triangle : T \to T \times T$ موجود است که هر $t \in T$ را به $(t, t) \in T \times T$ می‌نگارد. تابع $g : T \to Y$ را به عنوان ترکیب سه تابع به صورت دیاگرام زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ T \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

به عبارت دیگر $g(t) = \alpha(f(t, t))$.

ادعا می‌کنیم برای هر $t \in T$ ، $g(-) \neq f(-, t)$. اگر $g(-) = f(-, t_0)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در t_0 داریم:

$$f(t_0, t_0) = g(t_0) = \alpha(f(t_0, t_0))$$

نخستین تساوی از نمایش پذیر بودن g و دومین تساوی از تعریف g ناشی می‌شود. اما این بدین معنی است که α نقطه ثابتی دارد. تناقض! □

تبصره ۱ : واضح است که هر مجموعه Y با دو یا چند عضو، تابعی برای خود دارد که فاقد نقطه ثابتی است. در اینجا ما برای بحث درباره‌ی مجموعه‌ها و توابع، برخلاف صحبت در مورد اشیاء در یک رسته و همریختی‌های مابین این اشیاء، دچار دردسر و زحمت می‌شویم. شاید Y و T مجموعه هایی با ساختاری پیچیده تر(مثلاً جبری) باشند و توابع میان آنها حافظ این ساختار باشند. بعنوان مثال، ممکن است Y دارای ترتیب جزئی باشد و α باید ساختار ترتیبی را حفظ نماید. فقط چند نگاشت حافظ ترتیب (صعودی) از ترتیب جزئی Y به Y وجود دارد. ولی توابع زیادی از مجموعه Y به مجموعه Y وجود دارند. عبارات مشابه می‌توانند در ارتباط با هر ساختاری که روی Y بکار گرفته می شود، بیان گردند (بعنوان مثال فضای توپولوژی، گروه، شبکه کامل، ...). درون‌نگاشت‌های کمتری از Y وجود دارد اگر مصر به حفظ این ساختار توسط درون‌نگاشت ها باشیم. چنانچه به این واقعیت توجه نمایید که ممکن است با توابع مابین مجموعه ها سروکار نداشته باشیم، قضیه فوق محتوای بیشتری خواهد داشت.

تبصره ۲ : نگاشت $\triangle$ قطری نامیده می‌شود و بسیاری از برهانها «استدلالهای قطری» خوانده می‌شوند. تابع f نوع خاصی از تابع ارزش گذاری است و $f(t,t)$ یک ارزش یابی از خود است(تابع خودش مقدار خودش را محاسبه می کند)، از اینرو این توابع «خودارجاع» و این استدلالها «استدلالهای خودارجاعی» نامیده می شوند.

تبصره ۳ : ما مباحث لاوور و شانول [۱۷] را در استفاده از قضیه کانتور و عکس نقیض‌اش، که قضیه قطری نامیده می شود، ادامه خواهیم داد.

۲.۳ تعمیم قضیه کانتور

قضیه فوق را تعمیم می‌دهیم به طوری که به جای $\triangle = \langle Id, Id\rangle$ از $\langle Id, \beta\rangle$ برای یک تابع پوشای دلخواه (معکوس پذیر راست) $\beta : T \to S$ استفاده می‌کنیم. از اینرو $\triangle : \langle Id, Id\rangle : T \to T \times T$ هر t را به (t, t) می‌نگارد و $\langle Id, \beta\rangle : T \to T \times S$ هر t را به $(t, \beta(t))$ می‌نگارد.

روش بررسی این قضیه این است که بیان کنیم اگر تابع پوشای $\beta : T \to S$ موجود باشد آنگاه از طرفی $| S | \leq | T |$ و قضیه کانتور بیانگر اینست که $| T | \lneqq | Y^T |$ و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $| S | \lneqq | Y^T |$.

قضیه ۲ :

فرض کنید Y یک مجموعه و $\alpha : Y \to Y$ تابعی فاقد نقطه ثابت باشد و T, S مجموعه بوده و $\beta : T \to S$ تابعی پوشا باشد (یعنی یک وارون راست بصورت $\bar{\beta} : S \to T$ داشته باشد). آنگاه برای هر تابع $f : T \times S \to Y$ ، تابع $g_\beta : T \to Y$ که به صورت شکل زیر ساخته شده است، قابل نمایش با f نیست.

$$\begin{array}{ccc} T \times S & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle \langle Id, \beta\rangle}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ T & \xrightarrow{\quad g_\beta \quad} & Y \end{array}$$

برهان. فرض کنید Y ، α ، T و β داده شده باشند. فرض کنید که $\bar{\beta} : S \to T$ وارون راست β باشد. طبق تعریف

$$g_\beta(t) = \alpha(f(t, \beta(t))).$$

حال ادعا می کنیم که $\big(g_\beta(-) \neq f(-, s)\big)$ $\forall s \in S$. اگر $g_\beta(-) = f(-, s_0)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در $\bar{\beta}(s_0)$ داریم

$$
\begin{aligned}
f(\bar{\beta}(s_0), s_0) &= g_\beta(\bar{\beta}(s_0)) && \text{با توجه به نمایش پذیری } g_\beta \\
&= \alpha(f(\bar{\beta}(s_0), \beta(\bar{\beta}(s_0)))) && \text{با توجه به تعریف } g_\beta \\
&= \alpha(f(\bar{\beta}(s_0), s_0)) && \text{بنابر تعریف وارون راست}
\end{aligned}
$$

و این بدین معناست که α نقطه ثابتی دارد. $\square$

می‌توان قضیه را به روش دیگری بررسی نمود. مجموعه $S = T$ را مدنظر بگیرید و β را متفاوت از Id_T فرض کنید. روش معمول برای تجسم قضیه کانتور به قرار زیر است.

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\dots$
t_1	$[y_3]$	y_7	y_{21}	y_2	y_4	$\dots$
t_2	y_1	$[y_{17}]$	y_2	y_7	y_{41}	$\dots$
t_3	y_0	y_3	$[y_7]$	y_2	y_{24}	$\dots$
t_4	y_9	y_7	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	y_2	$[y_4]$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

همه موارد در کروشه‌های مربعی تغییر می یابند. مثلاً y_3 به $\alpha(y_3)$ تبدیل می شود. در هر حال، با اندک تأملی نشان داده میشود که نیازی به رفتن در امتداد قطر نیست. روش قطری، ساده ترین روش ممکن است. آنچه لازم است این است که هر ردیف از جدول حداقل تغییر عضوی داشته باشد. بنابراین ممکن است تصویری شبیه به تصویر زیر داشته باشیم :

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\dots$
t_1	y_3	y_7	y_{21}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_2	$[y_1]$	y_{17}	$[y_2]$	y_7	y_{41}	$\dots$
t_3	y_0	y_3	y_7	y_2	$[y_{24}]$	$\dots$
t_4	y_9	$[y_7]$	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	$[y_2]$	y_4	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

این واقعیت که هر ردیف چیز تغییر یافته ای دارد ذاتاً به این حقیقت اشاره دارد که β

پوشاست. مادامی که β پوشاست، قضیه کانتور نیز برقرار خواهد بود.

با این نظر ممکن است پرسش زیر را بدون پاسخ دادن به آن مطرح کنیم. آیا باید واقعاً این قضایا را قضایای قطری بنامیم؟ آیا خودارجاعی واقعاً نقشی در اینجا دارد؟ با توجه به اینکه ما می‌توانیم همان پارادکس ها را بدون خودارجاعی بوجود آوریم، آیا اصل دور– باطل راسل به این ترتیب از بین خواهد رفت؟

فصل ۴

نمونه هایی از قضیه کانتور

۱.۴ قضیه کانتور

ما بحث را با نسخه‌ی آشناتر قضیه کانتور درباره‌ی مجموعه توانی از اعداد طبیعی شروع خواهیم نمود. سپس به پارادکس نظریه مجموعه‌ای راسل و سایر پارادکس ها خواهیم پرداخت. نخست دو مورد را کاملاً شرح می دهیم و از همین ایده و مفهوم بعنوان قضایایی در آخر این فصل استفاده خواهیم نمود. همچنین به سایر موارد با سرعت بیشتری خواهیم پرداخت:

قضیه کانتور $\mathbb{N} \lneqq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

قضیه بیان می کند که تابع پوشایی از $\mathbb{N}$ به $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ نمی‌تواند موجود باشد. فرض کنید $S_0, S_1, S_2, \ldots$ یک شمارش پیشنهادی از تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ باشد. فرض کنید $2 = \{0, 1\}$ و تابع «نفی»[1] $\alpha : 2 \to 2$ را در نظر می گیریم بطوریکه $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) = 0$. فرض کنید $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2$ به این شکل تعریف گردد:

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{اگر}\ n \in S_m \\ 0 & \text{اگر}\ n \notin S_m \end{cases}$$

که برای هر m، $f(-,m)$ تابع مشخصه S_m است :

$$.f(-,m) = \chi_{S_m}$$

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 2 \end{tikzcd}$$

[1] negation

در حقیقت g تابع مشخصه مجموعه‌ی $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$ است.

ثابت می کنیم $\left(\chi_G = g(-) \neq f(-,m) = \chi_{S_m}\right) \quad \forall m$. زیرا اگر m_0 ی موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-, m_0)$ آنگاه با ارزش گذاری در m_0 داریم

$$f(m_0, m_0) = g(m_0) = \alpha(f(m_0, m_0))$$

که در آن نخستین تساوی ناشی از این فرض است که g قابل نمایش با m_0 است و دومین تساوی تعریف g است. این بدین معنی است که عملگر نفی نقطه ثابتی دارد که بوضوح غلط است. به عبارت دیگر $G \subseteq \mathbb{N}$ در شمارش پیشنهادی تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ نیست. $\square$

۲.۴ پارادکس راسل

این پارادکس بیانگر اینست که مجموعه تمام مجموعه‌هایی که اعضای خودشان نباشند هم عضوی از خودش است و هم عضوی از خودش نیست. فرض کنید «$Sets$» یک مجموعه‌ی جهانی[2] باشند. مجدداً تابع نفی $\alpha : 2 \to 2$ بطوریکه $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) = 0$ را مدنظر می‌گیریم.
فرض کنید $f : Sets \times Sets \to 2$ در مجموعه های s و t به شکل زیر تعریف شود:

$$f(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } s \in t \\ 0 & \text{اگر } s \notin t. \end{cases}$$

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم :

$$\begin{array}{ccc} Sets \times Sets & \xrightarrow{f} & 2 \\ \triangle \uparrow & & \downarrow \alpha \\ Sets & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}$$

[2] universe

در اصل g تابع مشخصه‌ی مجموعه هایی است که عضو خودشان نیستند. به ازای تمام مجموعه های t ، $g(-) \neq f(-,t)$. چون که اگر مجموعه t_0 موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-,t_0)$ آنگاه پس از ارزش‌گذاری در t_0 خواهیم داشت

$$f(t_0, t_0) = g(t_0) = \alpha(f(t_0, t_0))$$

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می شود. این بوضوح غلط است. بطور خلاصه، به منظور ایجاد این اطمینان که هیچ پارادکسی وجود ندارد ما بایستی بیان کنیم که g تابع مشخصه‌ی گردایه‌ای[3] از مجموعه‌هاست اما این گردایه به شکل یک مجموعه نیست. □

قبلاً در مورد پارادکس آرایشگر و دیگر پارادکس های خودارجاعی یادآور شدیم که می‌توانستند دقیقاً نظیر این عمل نمایند. پارادکس آرایشگر یک راه حل ساده داشت، مثلاً روستا را با این عبارت توصیف می نمود که روستایی وجود داشت که آرایشگر آن فقط آنهایی را اصلاح می‌کرد که خودشان نمی‌توانستند ریش خود را اصلاح کنند: چنین روستایی واقعاً وجود نداشت. ما همین مفهوم را درباره پارادکس راسل بکار می بریم، یعنی گردایه‌ای از مجموعه‌ها که شامل خودشان نیستند، به عنوان مجموعه وجود ندارند.

[3] collection

۳.۴ پارادکس گرلینگ

حال وارد مبحث پارادکس معنایی می شویم. پارادکس خودارجاعی گرلینگ در سال ۱۹۰۸ توسط کورت گرلینگ[4] و لئونارد نلسون[5] ارائه شد. بعضی از صفات وجود دارند که خودشان را توصیف می‌کنند و برخی وجود دارند که اینکار را انجام نمی دهند. بعنوان مثال $English$ یک کلمه انگلیسی است. $French$ یک کلمه فرانسوی نیست. $Polysyllabic$ کلمه چندسیلابی است. $Monosyllabic$ یک کلمه تک سیلابی نیست. تمام کلماتی را که خود را توصیف نمی‌کنند «خودنامصداق»[6] می‌نامیم. حال از خود بپرسید که آیا«خود نامصداق» بودن خود نامصداق است؟ اگر پاسخ آری باشد، در نتیجه «خود نامصداق» خود مصداق است و این تناقض است. اگر پاسخ خیر باشد، پس «خود نامصداق» خود نامصداق است و این منجر به تناقض می‌شود. پس این کلمه خود نامصداق است اگر و تنها اگر خود نامصداق نیست!

مجموعه Adj را تمامی صفات انگلیسی در نظر بگیرید. تابع $f : Adj \times Adj \to 2$ را داریم که برای تمامی صفات a_1 و a_2 بصورت زیر تعریف میشود:

$$f(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_2\text{، } a_1 \text{ را توصیف کند} \\ 0 & \text{اگر } a_2\text{، } a_1 \text{ را توصیف نکند.} \end{cases}$$

بنابراین ما ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} Adj \times Adj & \xrightarrow{\quad f \quad} & 2 \\ \triangle \Big\uparrow & & \Big\downarrow \alpha \\ Adj & \xrightarrow{\quad g \quad} & 2 \end{array}$$

Kurt Grelling[4]
Leonard Nelson[5]
heterological[6]

تابع g تابع مشخصه‌ی یک زیر مجموعه از صفاتی است که نمی‌توانند بوسیله خودشان توصیف شوند. این دقیقاً چیزی است که مفهوم $g(-) \neq f(-, a)$ ، برای تمامی صفات a بیان می‌کند. «خود نامصداق بودن» تنها صفت موجود در این زیر مجموعه نیست بلکه صفات دیگری نیز در این زیر مجموعه وجود دارند. برخی از مؤلفین از کلمه «غیر قابل استناد»[7] برای تشریح این مفهوم بهره جسته‌اند. فرمول بندی ما شامل تمامی چنین صفات پارادکسی می شود. □

۴.۴ پارادکس دروغگو

قدیمی ترین مثال برای پارادکس خودارجاعی، پارادکس دروغگو (کریتی ها[8]) است. شخصی از کریت بیان می‌کند: «تمامی کریتی ها دروغگو هستند». مثالهایی از این قبیل زیادند: «این جمله غلط است» و «من دارم دروغ می‌گویم». پارادکس دروغگو به پارادکس گرلینگ شباهت زیادی دارد. با این حال در پارادکس گرلینگ با صفات سروکار داریم، لیکن در اینجا ما با جملات کامل سروکار داریم. پارادکس کواین[9] یک مثال برجسته در این زمینه است:

«منجر به تناقض می‌شود، هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود»

منجر به تناقض می‌شود، هر گاه به نقل قول خودش ملحق شود. □

پارادکس قوی دروغگو[10]

راه حل متداول برای پارادکس دروغگو اینست که بگوییم جملات ویژه‌ای وجود دارند که نه درستند و نه غلط بلکه بی معنا هستند. جمله‌ی «من دروغگو هستم» از جمله‌ی چنین جملاتی است. این یک نوع منطق سه ارزشی است. به هر حال این یک راه حل نیست. جملات زیر را در

[7] impredicable

[8] Cretans

[9] Quine's paradox

[10] The strong Liar paradox

نظر بگیرید:

«منجر به تناقض یا بی معنایی می‌شود وقتی که به نقل قول خودش الحاق شود»

منجر به تناقض یا بی معنایی می‌شود وقتی که به نقل قول خودش الحاق شود.

اگر این جمله درست باشد، پس آن غلط یا بی‌معنی است. اگر جمله غلط باشد، پس آن درست است و بی‌معنی نیست. اگر جمله بی‌معنی باشد، پس آن درست است و بی‌معنی نیست.

این پارادکس همچنین می‌تواند با طرح ما فرمول بندی شود. مجموعه جملات انگلیسی را $Sent$ و مجموعه‌ی $3 = \{T, M, F\}$ (T یعنی درست، M یعنی بی معنی، F یعنی غلط) را در نظر بگیرید. حال تابع زیر را در نظر می‌گیریم $f : Sent \times Sent \to 3$ که برای تمامی جملات s_1, s_2 تعریف شده است:

$$f(s_1, s_2) = \begin{cases} T & \text{اگر } s_2 \text{، } s_1 \text{ را توصیف کند} \\ M & \text{اگر برای } s_2 \text{، توصیف کردن } s_1 \text{ بی معنی باشد} \\ F & \text{.اگر } s_2 \text{، } s_1 \text{ را توصیف نکند} \end{cases}$$

حال تابع $\alpha : 3 \to 3$ را در نظر بگیرید به طوری که $\alpha(T) = F$ و $\alpha(M) = \alpha(F) = T$.

ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{tikzcd} Sents \times Sents \arrow[r, "f"] & 3 \arrow[d, "\alpha"] \\ Sents \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 3 \end{tikzcd}$$

در حقیقت g تابع مشخصه‌ی جملاتی است که نه غلط اند و نه بی معنی، زمانیکه خودشان را توصیف می‌کنند. منظور از تابع مشخصه جملاتی هستند که g آنها را به T (به عنوان عکس M یا F) می‌نگارد. به ازای تمام جملات s داریم $f(-, s) \neq g(-)$. چون اگر جمله‌ی s_0 موجود

باشد به طوری که $g(-) = f(-, s_0)$ آنگاه پس از ارزش‌گذاری در s_0 خواهیم داشت

$$f(s_0, s_0) = g(s_0) = \alpha(f(s_0, s_0))$$

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می‌شود. این بوضوح غلط است. □

۵.۴ پارادکس ریچارد

جملات زیادی در زبان طبیعی وجود دارند که اعداد حقیقی مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کنند. فرض کنید تمام جملات طبیعی را به ترتیب الفبایی مرتب کنیم. با استفاده از این ترتیب، می‌توانیم همه این جملات که اعداد مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کنند را انتخاب کنیم. مثلاً «x نسبت مابین محیط دایره و قطر دایره‌ای است که بر ۱۰ تقسیم شده است»، عدد $\pi/10 = 0.314159\ldots$ را توصیف می‌کند. جملات مشابه زیادی از این نوع وجود دارند. چنین جمله‌ای را «جمله‌ی ریچارد» می‌نامیم. بنابراین ما مفهوم « جمله‌ی m–ام ریچارد» را داریم. مجموعه $10 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ را در نظر بگیرید و تابع $\alpha : 10 \to 10$ را به صورت $\alpha(i) = 9 - i$ تعریف کنید. این تابع نقطه ثابتی ندارد. حال تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 10$ را مدنظر بگیرید که به شکل زیر تعریف شده است :

n –امین عدد اعشاری جمله m –ام ریچارد= $f(n, m)$

بعنوان مثال، اگر جمله‌ی توصیف کننده $\pi/10$ در پاراگراف بالا جمله پانزدهم ریچارد باشد، آنگاه $f(4, 15) = 1$ چون 1 در $0.314159\ldots$ یعنی چهارمین عدد اعشاری جمله‌ی پانزدهم ریچارد برابر ۱ است.

حال به ساختار $g : \mathbb{N} \to 10$ که به شکل دیاگرام زیر است توجه کنید:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & 10 \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 10 \end{tikzcd}$$

تابع g یک عدد حقیقی مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کند به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم

$$g(-) \neq f(-, m)$$

یعنی این عدد، متفاوت از جملات ریچارد است. با این حال در اینجا یک جمله ریچارد وجود دارد که این عدد را توصیف می‌کند:

x یک عدد حقیقی میان ۰ و ۱ است که رقم n ام آن ۹ منهای رقم n ام عددی است که بوسیله‌ی جمله‌ی n ام ریچارد توصیف شده است.

چرا این پارادکس باقی می‌ماند؟ طرح ما محدودیتی از«جملات ریچارد» را پیشنهاد می‌کند. با این وجود بنا به دلایلی این پارادکس حفظ می شود(باقی می‌ماند). چِی کانگل[11] معتقد است که «جملات ریچارد» یک مفهوم خوش تعریف نیستند. جمله‌ی زیر را ملاحظه نمایید:

«اگر حدس گلدباخ صحیح باشد، فرض کنید x یک گاو قرمز باشد و در غیر این صورت x را عدد $3/4$ بگیرید.»

آیا این جمله یک عدد حقیقی را توصیف می‌کند؟ آیا این جمله، یک جمله از «جملات ریچارد» است؟ حتی اگر بدانیم که جمله‌ای از «جملات ریچارد» است قادر به تعیین اینکه، این

[11] Jay Kangel

جمله چه عددی را توصیف می‌کند نیستیم. همچنین روشن نیست که جمله ریچارد زیر چه عددی را توصیف می‌کند: « اگر فرضیه ریمان صحیح باشد، x را $1/4$ قرار دهید و در غیر این صورت x را $3/4$ قرار دهید.» با توجه به اینکه مجموعه جملات ریچارد خوش تعریف نیستند و همچنین تابع f خوش تعریف نیست، جای تعجب نیست که این پارادکس حفظ شود. □

۶.۴ مسأله توقف تورینگ

فرمول بندی زیر از دو اثر شگرف هلر[12] در نظریه رسته های بازگشتی [۹] و مانین[13] در نظریه محاسبات کلاسیک و کوانتوم [۱۹] الهام گرفته شده است. برای این نمونه ما از جهان راحت و ساده مجموعه‌ها و توابع صرفنظر خواهیم نمود. در این نمونه ما بایستی درباره جهان‌های محاسبه پذیر سخن بگوییم. یک جهان محاسبه پذیر، یک رسته U با دو ویژگی زیر می‌باشد:

۱) $\mathbb{N}$ و 2 اشیایی در U هستند.

۲) برای هر شیء C در U، نوعی شمارش از اعضای C وجود دارد. یک شمارش از اعضای C، یک یکریختی (ایزومورفیسم) تام $e_C : \mathbb{N} \to C$ است. مجموعه‌ی C باید به عنوان یک مجموعه از اشیای محاسبه پذیر مانند درختها، گراف ها، اعداد، بسته ها، رشته ها، ... در نظر گرفته شود.

۳) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \to C'$ یک عدد متناظر $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$ موجود است. این عدد به عنوان عدد گودلی برنامه ای که f را محاسبه می‌کند، در نظر گرفته می‌شود.

۴) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \to C'$ یک مجموعه .$r.e$ متناظر $W_f \subseteq \mathbb{N}$ موجود است که به صورت $W_f = dom(f) = \{x | f(x)$ تعریف شده $\}$ می‌باشد. برای هر $c \in C$، f مقداری در c

Heller[12]

Manin[13]

دارد اگر و تنها اگر $e_C^{-1}(c) \in W_f$. برای بار دیگر f بایستی تابع جزیی از یک دامنه محاسبه پذیر به دامنه دیگری در نظر گرفته شود. تابع توقف در جهان محاسبه پذیر باید یک تابع تام در U باشد $Halt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2$ به طوری که بازای هر $f : C \to C'$ داریم $Halt(-, \ulcorner f \urcorner) = \chi_{W_f}$. این بیانگر اینست که $Halt$ (توقف) باید قادر به بیان این باشد که برای چه مقادیری در C محاسبه توقف می‌کند. قرار دهید

$$Halt(n,m) = \begin{cases} 1 & n \in W_m \text{اگر} \\ 0 & n \notin W_m \text{اگر}. \end{cases}$$

تابع $\alpha : 2 \to 2$ به این صورت تعریف شود: $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) \uparrow$ ، یعنی محاسبه تعریف نشده است.

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 2 \end{tikzcd}$$

این بخش را با نشان دادن این که $Halt$ تام نیست چون در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف نشده است، به پایان می بریم. اگر $Halt$ در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف شده باشد آنگاه ما به تناقض خواهیم رسید. چون اگر $\ulcorner g \urcorner \in W_{\ulcorner g \urcorner}$، با استفاده از تعریف $Halt$ داریم:

$Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 1$	
$g(\ulcorner g \urcorner) \downarrow$	با استفاده از توقف g
$g(\ulcorner g \urcorner) = \alpha Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = \alpha(1) \uparrow$	با استفاده از تعریف g
$Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 0$	به عبارتی خواهیم داشت

از این رو هیچ تابع $Halt$ تامی با شرایط فوق نمی‌تواند وجود داشته باشد. $\square$

۷.۴ یک زبان غیر $r.e.$

می‌خواهیم نشان دهیم زبانی وجود دارد که بوسیله هیچ ماشین تورینگی پذیرفته نمی‌شود. فرض کنید $M_0, M_1, M_2, \ldots$ شمارشی از تمام ماشینهای تورینگ در زبان ورودی $\Sigma = \{0,1\}$ باشند.

کلمات Σ^* را بدین صورت مرتب می‌کنیم: قرار دهید $u < v$ هر گاه

یا (۱) طول u کوچکتر از طول v باشد؛

یا (۲) طول u برابر طول v بوده و u در ترتیب الفبایی $(0 < 1)$ قبل از v قرار گیرد.

برای کلمه‌ی $w \in \Sigma^*$ عدد $\langle w \rangle \in \mathbb{N}$ جایگاه w را در ترتیب بالا مشخص می‌کند. به عبارت دیگر عدد $\langle w \rangle$ کد کلمه w می‌باشد. بنابراین جدولی به شکل زیر خواهیم داشت.

0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	$\ldots$ w $\ldots$
۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	۹	$\ldots$ $\langle w \rangle$ $\ldots$

تابع $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(w_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } w_i\text{، بوسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته شده باشد} \\ 0 & \text{اگر } w_i\text{، بوسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته نشده باشد.} \end{cases}$$

پس ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^* \times \Sigma^* \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\ \Sigma^* \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 2 \end{tikzcd}$$

که تابع مشخصه زبانی است که توسط هیچ ماشین تورینگی پذیرفته نمی‌شود. البته این واقعیت که زبانهای غیر $r.e$ ای وجود دارد از مباحث شمارشی ساده‌ای نتیجه می‌شود: چون تعداد ماشین های تورینگ شماراست و تعداد زبانهای روی Σ^* ناشماراست. □

۸.۴ یک اُراکل B بطوریکه $P^B \neq NP^B$

منظور از زمان اجرا تعداد حرکاتی است که ماشین با یک ورودی داده شده، قبل از توقف انجام داده و احتمالاً به خروجی منجر می‌شود. پس زمان اجرا متأثر از دو مولفه ماشین و ورودی داده شده می‌باشد.

تابع پیچیدگی زمان محاسبه: به عنوان نمونه برای n داده شده تمام کلمات با طول n را در نظر می‌گیریم. با دادن این کلمات به عنوان ورودی، ماشین برای هر کلمه یک زمان محاسبه صرف می‌کند. ماکزیمم زمان محاسبه برای n ثابت تابع پیچیدگی زمانی نامیده می‌شود. تابع پیچیدگی زمانی بستگی به ماشین تورینگ دارد. کلمات با طول n در زمان $f(n)$ محاسبه می‌شوند.

$$Tim_M(n) \longrightarrow f(n)$$

قرار می‌دهیم:

$$P = \text{تمام مسائلی که می توانند در زمان چندجمله‌ای بطور قطعی حل شوند}$$

$$NP = \text{تمام مسائلی که در زمان چندجمله‌ای با ماشین های غیرقطعی قابل حل هستند}$$

با توجه به تعریف فوق داریم $P \subseteq_? NP$. ماشین تورینگ با اراکل B، ماشین تورینگ معمولی با این خاصیت اضافی است که هر لحظه که بخواهد جواب سئوال $x \in B$ را در یک واحد زمان پیدا کند. با ثابت نگهداشتن B، P^B مجموعه تمام مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای توسط ماشین های تورینگ قطعی با اراکل B قابل حل‌اند و NP^B مجموعه تمام مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای توسط ماشین های تورینگ قطعی با اراکل B قابل حل‌اند.

یکی از مهمترین سئوالات مطرح شده در علوم کامپیوتر اینست که آیا P، مجموعه تمامی مسائلی که می‌توانند توسط ماشین تورینگ قطعی در زمان چندجمله‌ای حل شوند، با مجموعه NP، مجموعه تمامی مسائلی که می‌توانند توسط ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان چندجمله‌ای حل شوند، برابر است یا نه؟

ما در این پایان نامه به این مسأله جایزه دار روز پاسخ نخواهیم داد، بلکه به سئوال مرتبط دیگری پاسخ خواهیم داد. به همین سئوال در خصوص ماشین های تورینگ اراکل دار توجه می‌کنیم. یک ماشین تورینگ اراکل دار، ماشین تورینگی با یک مجموعه‌ی مرتبط B است، به طوری که ماشین تورینگ می تواند عضویت هر کلمه ای در B را در زمان واحد تعیین کند. برای مجموعه داده شده B، مجموعه‌های مشابه P^B و NP^B را می‌توان درست کرد.

بیکر[14]، گیل[15] و سولووی[16] [۱] ثابت کرده‌اند که مجموعه‌ی A ای وجود دارد به طوری که $P^A = NP^A$ و یک مجموعه‌ی B وجود دارد به طوری که $P^B \neq NP^B$. در اینجا نتیجه دوم را ثابت خواهیم نمود. حال جهت تکمیل مبحث این قسمت قضیه‌ی زیر از [۱۰] بیان و اثبات می‌شود.

قضیه: یک اراکل B موجود است به طوری که $P^B \neq NP^B$.

---

[14] Baker

[15] Gil

[16] Solovay

برهان. دنبال اراکل B و زبان $L_B \subseteq \{0,1\}^*$ هستیم به طوری که $L_B \in NP^B$ ولی $L_B \notin P^B$.

طرز ساختن B: روی الفبای $\{0,1\}$ برای هر $m \in \mathbb{N}$، حداکثر یک کلمه با طول m در B قرار می‌دهیم. سایر کلمات با طول m را کلمات ممنوعه می‌نامیم. تمام ماشین های تورینگ به صورت $M_1, M_2, M_3, \ldots$ را با روش قطری لیست می‌کنیم، به طوری که هر ماشین بی‌نهایت بار ظاهر شود:

$$M_1, M_1\ M_2, M_1\ M_2\ M_3, M_1\ M_2\ M_3\ M_4, \ldots$$

B_0 را تهی قرار می‌دهیم. با داشتن B_i می‌خواهیم B_{i+1} و در نهایت $B = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$ را بسازیم. ماشین M_i با اراکل B_i روی ورودی 0^i را اجرا می‌کنیم. در $M_i^{B_i}$، اگر سئوال $x \in B_i$ پرسیده شود که طول x کوچکتر از i است آنگاه اراکل B_i جواب بلی یا خیر خواهد داد. اگر $M_i^{B_i}$ سئوال $y \in B_i$ را بپرسد که y طول بزرگتر یا مساوی i دارد، فرض کنیم y در B نیست (یعنی y را جزء کلمات ممنوعه قرار دهیم). اجرای $M_i^{B_i}$ روی 0^i را تا i^{logi} مرحله انجام می‌دهیم. اگر در این تعداد مرحله، $M_i^{B_i}$ توقف کرده، 0^i را رد کند ما کلمه ای با طول i را که ممنوعه نیست در B_{i+1} قرار می‌دهیم (در صورت وجود). اگر $M_i^{B_i}$، 0^i را در i^{logi} مرحله رد نکند، آنگاه هیچ کلمه‌ای با طول i در B_{i+1} قرار نمی‌دهیم.

تعداد کلمات ممنوع شده توسط $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i$ حداکثر برابر است با

$$\sum_{j=1}^{i} j^{logj} \leq i(i^{logi}) = i^{1+logi} < 2^i$$

با توجه به رابطه فوق $i^{1+logi} < 2^i$ زمانی برقرار است که رابطه $logi(1+logi) < i$ درست باشد. منتهی رابطه اخیر بازای $i \geq 32$ صادق خواهد بود. پس برای $i \geq 32$ ما کلمات غیر ممنوعه خواهیم داشت.(همه را نمی‌توان ممنوعه کرد یعنی B_{i+1} تهی نخواهد بود). پس اراکل B تعریف

شد. حال زبان L_B را بدین صورت تعریف می‌کنیم: مجموعه 0^i هایی که B کلمه ای به طول i دارد: $L_B = \{0^i|$ است i شامل کلمه‌ای با طول $B\ \}$.

برای اثبات کافیست نشان دهیم $L_B \in NP^B - P^B$. بوضوح $L_B \in NP^B$ زیرا برای 0^i داده شده کلمه‌ای با طول i روی ۱و۰ حدس زده و چک می‌کنیم که آیا در B هست یا نه؟ اگر در B بود پس 0^i در L_B هست و در غیر این صورت حدس دیگری می‌زنیم. ولی اینکه L_B در P^B نیست، از استدلال قطری نتیجه می‌شود.

اگر $L_B \in P^B$، پس ماشین تورینگ با اراکل B در زمان چندجمله‌ای P مثل M^B، زبان L_B را می‌پذیرد. اگر کد این ماشین k باشد پس M_k^B، L_B را می‌پذیرد. می‌توان فرض کرد $k \geq 32$ و نیز $k^{logk} \geq p(k)$ زیرا هر ماشین تورینگ بی‌نهایت کد دارد. اگر M_k^B، 0^k را بپذیرد، پس 0^k در L_B هست و در نتیجه B کلمه ای به طول k دارد و این امر زمانی ممکن است که $M_k^{B_k}$، 0^k را رد کند. از آنجایی که M_k^B و $M_k^{B_k}$ باید عین هم با ورودی 0^k عمل کنند. (چون که B و B_k کلمات یکسانی با طول کوچکتر از k دارند ونیز B کلمه ای با طول بزرگتر از k که $M_k^{B_k}$ در ورودی 0^k از اراکل استفاده کند، ندارد) پس به تناقض می‌رسیم. یعنی از پذیرفتن ورودی 0^k این نتیجه حاصل می‌شود که $M_k^{B_k}$، 0^k را نمی‌پذیرد یعنی M_k^B، 0^k را نمی‌پذیرد!

حال اگر M_k^B، 0^k را رد کند پس 0^k در L_B نیست پس $M_k^{B_k}$ نمی‌تواند 0^k را در k^{logk} رد کند (طبق تعریف و با توجه به اینکه $k \geq 32$). اگر $M_k^{B_k}$ ورودی 0^k را در k^{logk} مرحله رد کرده بود آنگاه هنوز کلمه‌ای با طول k که در لیست ممنوعه نبود وجود می‌داشت و کلمه‌ای با طول k بایستی در B بیفتد، پس 0^k باید در L_B می‌بود. در نتیجه M_k^B، 0^k را در k^{logk} مرحله رد نمی‌کند. اما از آنجاییکه $k^{logk} \geq p(k)$، بنابراین M_k^B، ورودی 0^k را هرگز نمی‌تواند رد کند و این تناقض است. بنابراین $L_B \notin P^B$. $\square$

در ادامه مبحث می‌توان همان قضیه فوق را در قالبی کلی تر به صورت زیر بیان و فرمول بندی نمود.

فرض کنید $M_0^?, M_1^?, M_2^?, \ldots$ شمارشی از تمامی ماشین های تورینگ اراکل دار قطعی در زمان چندجمله‌ای روی الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ باشد. دنباله متناظر چند جمله‌ایهای $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ را در نظر بگیرید که بیانگر زمان اجراء در بدترین حالت برای هر ماشین باشد.

برای هر تابع $f : \Sigma^* \times \mathbb{N} \to 2$ و بازای هر $i \in \mathbb{N}$، $f(-,i) : \Sigma^* \to 2$ یک تابع مشخصه روی مجموعه‌ی Σ^* است. ما اغلب یک مجموعه و تابع مشخصه‌اش رابه یک مفهوم خواهیم گرفت. فرض کنید که $\bar{f}(-,i)$ دلالت بر تابع مشخصه متمم $f(-,i)$ دارد، یعنی $\bar{f}(-,i)$ مجموعه‌ی x هایی است که $f(x,i)$ برابر ۰ است. فرض کنید $\bar{F}(-,i)$ تابع مشخصه‌ی اجتماعی زیر باشد:

$$\bar{F}(-,i) = \bigcup_{j \leq i} \bar{f}(-,j)$$

ما $f(-,-)$ را به صورت استقرایی تعریف خواهیم کرد. $\forall w \in \Sigma^* : f(w,0) = 1$. برای $w \in \Sigma^*$ و $i \in \mathbb{N} - 0$ داریم $f(w,i) = 0$ اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $(\forall w' < w) f(w',i) = 1$ که در آن $<$ یک ترتیب صفحه‌ی (۵۱) روی کلمات Σ^* است. این اطمینان را می‌دهد که فقط یک کلمه‌ی مورد قبول B برای هر i وجود دارد.

۲) $M_i^{\overline{F(-,i)}}$ در i^{logi} مرحله، $0^{|w|}$ را رد می‌کند.

۳) در $(\forall j < i) M_j^{\overline{F(-,j)}}$ با ورودی $0^{|w|}$، سئوال $w \in \overline{F(-,j)}$ در j^{logj} مرحله پرسیده نمی‌شود.

حال که این f تعریف شد، تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\
\Sigma^* \arrow[u, "\langle ID, \beta \rangle"] \arrow[r, "g"] & 2
\end{tikzcd}$$

که در آن $\beta(w) = |w|$ ، $\alpha(0) = 1$ و $\alpha(1) = 0$.

تساوی $g(w) = 1$ برقرار است اگر و تنها اگر $f(w, |w|) = 0$ اگر و تنها اگر سه شرط فوق محقق شود.

g تابع مشخصه مجموعه‌ی $B \subseteq \Sigma^*$ می باشد. حال زبانی به شکل زیر می‌سازیم

$L_B = \{0^i|$ است i شامل کلمه‌ای با طول B $\}$.

این زبان به سادگی می‌تواند بوسیله ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان خطی تعیین شود. در ورودی 0^i، ماشین تورینگ غیر قطعی به طور ساده یک رشته‌ی w از طول i را حدس زده و بررسی می‌کند آیا در مجموعه‌ی B هست یا نه؟ از اینرو $L_B \in NB^B$. در مقایسه، به دلیل شرط (۲) بالا L_B نمی‌تواند بوسیله هیچ ماشین تورینگ قطعی در زمان چندجمله‌ای شناخته شود، یعنی $\forall m \big(g(-) \neq f(-, m) \big)$. $\square$

۹.۴ پارادکس سفر در طول زمان

اگر مسافرت در زمان ممکن بود، یک مسافر زمان شاید می‌توانست در زمان به عقب برگردد و پدربزرگ مجرد خود را بکشد، پس اطمینان حاصل نماید که مسافر زمان دیگر هرگز بدنیا نخواهد آمد. اگر او هرگز بدنیا نیامده بود، آنگاه او هیچ وقت نمی‌توانست پدربزرگ خود را بکشد. برای بدست آوردن چنین نتایج تناقض آمیزی هیچ دلیلی وجود ندارد که مرتکب قتل شویم: مسافر

زمان می‌تواند با برگشت به زمان پیشین اطمینان حاصل نماید که والدین مجرد او هرگز با هم ملاقات نمی‌کنند.

این پارادکس های خودارجاعی می‌تواند در طرح ما بکار گرفته شوند. نکته کلیدی زیر از مفاهیم مهم آن می‌باشد. مسافر زمان نباید به پدربزرگش شلیک کند (البته علاوه بر دلایل اخلاقی)، نه بخاطر اینکه او دیگر بدنیا نخواهد آمد، بلکه بدین دلیل که اگر بخواهد پدر بزرگش را بکشد قادر نخواهد بود که در زمان به عقب برگردد. این خودارجاعی است. مسافر زمان خودارجاع نیست، بلکه رخداد (حادثه) خودارجاع است.

با این تصور، ما مجموعه‌ی $Events$ را تمامی رویدادهای ممکن در زمان فضای ۴− بعدی توصیف می‌کنیم. مجموعه $Events$ ساختار زیادی دارند. در واقع، کل هدف علم فیزیک، کشف این ساختار اضافی است. ما تا بحال، آن را فقط به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم. تابع زیر را داریم

$$f : Events \times Events \to 2$$

که برای رویدادهای e_1 و e_2 به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(e_1, e_2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } e_2\text{، با } e_1 \text{ سازگار باشد} \\ 0 & \text{اگر } e_2\text{، با } e_1 \text{ ناسازگار باشد.} \end{cases}$$

به عنوان مثال قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} A &= (\text{خورشید در زمان و مکان ویژه ای طلوع می کند}) \\ B &= (\text{خورشید در زمان و مکان ویژه ای طلوع نمی کند}) \\ C &= (\text{علی اکنون در نیویورک توپ بازی می کند}) \\ D &= (\text{سارا اکنون در کالیفرنیا زندگی می کند}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E &= (\text{جک پدربزرگ مجردش را می کشد}) \\
F &= (\text{جک متولد می شود})
\end{aligned}
$$

با توجه به تعریفی که نمودیم، خواهیم داشت: $f(A,B)=0$ و $f(C,D)=1$ و $f(E,F)=0$

حال ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$
\begin{tikzcd}
Events \times Events \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\
Events \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 2
\end{tikzcd}
$$

g تابع مشخصه‌ی رویدادهایی است که با خودشان ناسازگاری دارند. این رویدادها با رویدادهای دیگر نمی‌توانند در جهان ما وجود داشته باشند.

در سال ۱۹۴۹، کورت گودل[17] مقاله‌ای درباره‌ی نظریه‌ی نسبیت نوشت. در این مقاله گودل یک مدل ریاضی ساخت که در آن سفر در طول زمان محتمل بود. در صفحه ۱۶۸ [۲۵]، رودی روکر[18] مصاحبه‌ای را با گودل شرح می‌دهد که در آن روکر درباره پارادکس‌های مسافر زمان سئوالاتی می‌پرسد. گودل پاسخ می‌دهد که دنیا به سادگی به شما اجازه نخواهد داد که پدربزرگتان را بکشید. درست مثل اینکه P و $\neg P$ هر دو نمی‌توانند صحیح باشند، بنابراین دنیا به شما اجازه نخواهد داد که باعث یک تناقض شوید. جملات گودل بدین صورت هستند: «سفر در زمان محتمل است، اما هیچ شخصی نمی‌تواند گذشته‌ی خویش را بکشد». سپس گودل می‌خندد و نتیجه گیری می‌کند که «قیاس مورد غفلت واقع شده است. منطق خیلی قدرتمند است».

Kurt Gödel[17]

Rudy Rucker[18]

فصل ۵

قضیه قطری و نمونه هایی از قضایای قطری

عکس نقیض قضیه کانتور نیز از اهمیت یکسانی برخوردار است.

قضیه ۳ (قضیه قطری)

اگر Y یک مجموعه باشد و مجموعه‌ی T و تابع $f : T \times T \to Y$ داده شده باشند به طوری که تمام توابع $g : T \to Y$ بوسیله‌ی f قابل نمایش باشند (عضو $t \in T$ وجود داشته باشد که $g(-) = f(-, t)$)، آنگاه هر تابع $\alpha : Y \to Y$ یک نقطه‌ی ثابت دارد.

برهان. برهان ساختاری است. فرض کنید Y، T، f و α داده شده باشند. پس تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ T \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

در حقیقت تابع g به شکل زیر تعریف شده است

$$g(m) = \alpha(f(m, m)).$$

از آنجایی که فرض کرده‌ایم g بوسیله $t \in T$ قابل نمایش است، داریم

$$g(m) = f(m, t).$$

و بنابراین ما نقطه‌ی ثابتی برای α در $y_0 = g(t)$ را داریم. در نتیجه با استفاده از نمایش پذیری و تعریف g داریم: $\alpha(g(t)) = (\alpha(f(t, t)) = g(t)$. □

تبصره ۴:

توجه به این نکته مهم است که قضیه فرض قویتری از آن دارد که در اثبات بکار برده شده است. قضیه می‌خواهد که **تمام** $g : T \to Y$ ها قابل نمایش باشند، اما اثبات فقط از این حقیقت

استفاده می کند که تابع g که در بالا ساخته شده است، قابل نمایش باشد. در آینده، ما از این حقیقت استفاده خواهیم کرد و فقط از نمایش پذیری g ساخته شده استفاده خواهیم نمود.

جبر لیندنبام – تارسکی [1]

در منطق ریاضی، جبر لیندنبام یا لیندنبام – تارسکی از نظریه منطقی T، شامل کلاسهای هم ارزی از جملات نظریه است که تحت رابطه‌ی $\sim$ تعریف شده‌اند به طوری که $p \sim q$ اگر p و q به صورت اثبات پذیر منطقی در T معادل باشند. به عبارت دیگر، دو جمله معادلند اگر نظریه‌ی T اثبات کند که هریک دیگری را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید L یک زبان گزاره‌ای کلاسیک باشد. رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ را روی فرمولهایی از L با $p \sim q$ تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $\vdash p \Leftrightarrow q$. فرض کنیم $B = L/\sim$ مجموعه کلاسهای هم ارزی باشد. عملگرهای عطف $\wedge$، فصل $\vee$ ومتمم گیری $[p]'$ روی B به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱) $[p] \vee [q] := [p \vee q]$

۲) $[p] \wedge [q] := [p \wedge q]$

۳) $[p]' := [\neg p]$

با فرض $[p \wedge \neg p] = 0$ و $[p \vee \neg p] = 1$، آنگاه ساختار $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ یک جبر بولی است که جبر لیندنبام – تارسکی در زبان گزاره‌ای L نامیده می‌شود. برعکس، بازای هر جبر بولی شمارای B، یک نظریه‌ی T از منطق گزاره‌ای موجود است به طوری که جبر لیندنبام – تارسکی از T به B یکریخت [2] باشد. بعبارت دیگر، هر جبر بولی یک جبر لیندنبام – تارسکی است.

[1] Lindenbaum-Tarski

[2] isomorphic

۱.۵ لم قطری

ما از زبان و نمادگذاری کتاب مندلسون [۲۰] استفاده می‌کنیم. $\ulcorner\mathcal{B}(x)\urcorner$ عدد گودلی $\mathcal{B}(x)$ است. تابع $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ به این صورت تعریف می‌شود: برای هر $\mathcal{B}(x)$ ای که $\mathcal{B}$ یک عبارت منطقی با تنها متغیر آزاد x است، قرار می‌دهیم:

$$D(\ulcorner\mathcal{B}(x)\urcorner) = \ulcorner\mathcal{B}(\ulcorner\mathcal{B}(x)\urcorner)\urcorner.$$

قضیه: (لم قطری)

برای هر فرمول خوش ساخت [3] (wff)، $\mathcal{E}(x)$ با x به عنوان تنها متغیر آزادش، یک فرمول بسته (جمله) $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $\vdash C \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner\mathcal{C}\urcorner)$.

برهان. فرض کنید $Lind^i$ مجموعه کلاسهای جبری لیندنبام از فرمول های خوش ساخت با تعداد i تا متغیر آزاد باشد. دو فرمول خوش ساخت معادلند، اگر آنها به صورت اثبات پذیر منطقی معادل باشند. فرض کنید $f : Lind^1 \times Lind^1 \to Lind^0$ برای دو wff $\mathcal{B}(x)$ و $\mathcal{H}(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(\mathcal{B}(x), \mathcal{H}(y)) = \mathcal{H}(\ulcorner\mathcal{B}(x)\urcorner)$$

فرض کنید که عملگر $\Phi_{\mathcal{E}}$ روی $Lind^0$، به این صورت تعریف شده باشد $\Phi_{\mathcal{E}} : Lind^0 \to Lind^0$ که $\mathsf{P} \longmapsto \Phi_{\mathcal{E}}(\mathsf{P}) = \mathcal{E}(\ulcorner\mathsf{P}\urcorner)$. با استفاده از این توابع، آنها را برای ساختن g به شکل زیر ترکیب می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} Lind^1 \times Lind^1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & Lind^0 \\ \triangle \big\uparrow & & \big\downarrow \Phi_{\mathcal{E}} \\ Lind^1 & \xrightarrow{\quad g \quad} & Lind^0 \end{array}$$

[3] فرمول خوش ساخت = wff = well-founded formula

با استفاده از تعریف داریم:

$$g(\mathcal{B}(x)) = \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(x))) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x)\urcorner)\urcorner)$$

ثابت می‌کنیم g با $\mathcal{G}(x) = \mathcal{E}(D(x))$ نمایش پذیر است. چون که

$$g(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x)\urcorner)\urcorner) = \mathcal{E}(D(\ulcorner \mathcal{B}(x)\urcorner)) = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{B}(x)\urcorner) = f(\mathcal{B}(x), \mathcal{G}(x))$$

بنابراین نقطه ثابت $\Phi_{\mathcal{E}}$ در $\mathcal{C} = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x)\urcorner)$ باید موجود باشد، چرا که:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x)\urcorner)\urcorner) &= \Phi_{\mathcal{E}}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x)\urcorner)\urcorner) && \text{بنابر تعریف } \Phi_{\mathcal{E}} \\
&= \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x))) && \text{بنابر تعریف } f \\
&= g(\mathcal{G}(x)) && \text{بنابر تعریف } g \\
&= f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x)) && \text{بنابر نمایش پذیری } g \\
&= \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x)\urcorner) && \text{بنابر تعریف } f
\end{aligned}$$

$\square$

۲.۵ نخستین قضیه ناتمامیت گودل

فرض کنید $\mathrm{Proof}(y, x)$ محمول «y عدد گودلی یک اثبات از جمله‌ای است که عدد گودلی آن x است» باشد. سپس فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv (\forall y)\neg \mathrm{Proof}(y, x).$$

نقطه‌ی ثابت $\mathcal{G}$ برای $\mathcal{E}(x)$ در یک نظریه سازگار و نظریه ω – سازگار، جمله‌ای است که معادل با اثبات ناپذیری اش است.

نظریه T را ω – سازگار گویند هر گاه برای هر فرمول $\phi(x)$، اگر $\forall n \in \mathbb{N} \;\; T \vdash \phi(\bar{n})$ آنگاه $T \nvdash \neg\forall\phi(x)$.

قضیه: اگر T، ω – سازگار باشد آنگاه جمله گودل $\mathcal{G}$ وجود دارد که $T \nvdash \mathcal{G}$ و $T \nvdash \neg\mathcal{G}$.

برهان.

قرار دهید $\mathcal{G}$ نقطه ثابت $\mathcal{E}(x)$ باشد یعنی $T \vdash \mathcal{G} \longleftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. اگر $T \vdash \mathcal{G}$ آنگاه خواهیم داشت $\exists n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ و در نتیجه $T \vdash \exists x \neg\text{Proof}(x, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. پس داریم $T \vdash \neg\mathcal{E}(\ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ یا معادلاً $T \vdash \neg\mathcal{G}$ و این تناقض است. از طرف دیگر اگر $T \vdash \neg\mathcal{G}$، خواهیم داشت: $T \vdash \exists x \text{Proof}(x, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. چون T سازگار است پس $T \nvdash \mathcal{G}$. پس $\text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ نادرست است یا $\neg\text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. پس $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\text{Proof}(\bar{n}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. در نتیجه بنا به ω – سازگاری داریم $T \nvdash \exists x \;\; \text{Proof}(x, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ یا $T \nvdash \neg\mathcal{G}$ و این تناقض است. □

۳.۵ قضیه ناتمامیت گودل – راسر

فرض کنید $\text{Neg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ برای اعداد گودلی به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{Neg}(\ulcorner B(x)\urcorner) = \ulcorner\neg B(x)\urcorner$$

فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv \forall y\Big(\text{Proof}(y, x) \to \exists w\Big(w < y \wedge \text{Proof}(w, \text{Neg}(x))\Big)\Big)$$

محمول اثبات پذیری راسر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{RProv}(x) \equiv (\exists y)\Big(\mathrm{Proof}(y,x) \wedge \forall w \leqslant y \neg \mathrm{Proof}(w,\neg x)\Big)$$

پس $\mathcal{E}(x) \equiv \neg\mathrm{RProv}(x)$. نقطه ثابت R برای $\mathcal{E}(x)$ می‌گوید که اگر من اثبات پذیر بودم آنگاه اثباتی کوچکتر برای نقیض من وجود داشت.

حال برای هر نظریه سازگار T می‌توان نشان داد که $T \nvdash R$ و $T \nvdash \neg R$.

زیرا اگر $T \vdash R$ پس $T \nvdash \neg R$. پس $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\mathrm{Proof}(\bar{\mathrm{n}}, \neg \mathrm{R})$ ولی برای m ای $T \vdash \mathrm{Proof}(\bar{\mathrm{m}}, \mathrm{R})$. پس $T \vdash \mathrm{RProv}(R)$ و این تناقض است. زیرا $T \vdash R \leftrightarrow \neg\mathrm{RProv}(\mathrm{R})$.

همچنین اگر فرض کنیم $T \vdash \neg R$ پس $T \vdash \mathrm{RProv}(R)$ نیز $T \nvdash R$. پس داریم $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\mathrm{Proof}(\bar{\mathrm{n}}, \neg\mathrm{R})$ و $\exists m \quad T \vdash \mathrm{Proof}(\bar{\mathrm{m}}, \mathrm{R})$ و بنا به فرض خواهیم داشت: $T \vdash (\exists y)\Big(\mathrm{Proof}(y,R) \wedge \forall w \leqslant y \quad \mathrm{Proof}(w,\neg R)\Big)$ بنابراین با توجه به مفروضات فوق به تناقض خواهیم رسید. □

۴.۵ قضیه تارسکی

فرض کنید که یک فرمول خوش تعریف $\tau(x)$ وجود دارد که این حقیقت را توضیح می‌دهد که« x عدد گودلی یک جمله درست می‌باشد». قرار دهید $\mathcal{E}(x) \equiv \neg\tau(x)$.

وجود نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$، نشان می دهد که $\tau(x)$ کاری که قرار است انجام دهد را واقعاً انجام نمی‌دهد. نتیجه می‌گیریم، نظریه‌ای که در آن لم قطری برقرار است نمی‌تواند درستی جملات خودش را بیان کند.

می‌توان نشان داد که محمول درستی تعریف پذیر نیست. یعنی در زبان L_A فرمول $\tau(x)$

وجود ندارد که برای هر فرمول ϕ، استلزام $\vdash \phi \longleftrightarrow \tau(\ulcorner\phi\urcorner)$ برقرار باشد: اگر چنان τ ای وجود داشت، پس $\neg\tau(x)$ نقطه ثابتی داشت مثل T که $\vdash T \longleftrightarrow \neg\tau(\ulcorner T\urcorner)$ و از طرفی باید داشته باشیم $\vdash T \longleftrightarrow \tau(\ulcorner T\urcorner)$ پس نتیجه می‌شود $\vdash T \longleftrightarrow \neg T$ و این یک تناقض است. $\square$

۵.۵ گزاره های پریخ

گزاره های درستی وجود دارند که اثباتهای طولانی دارند، اما حقیقت اثبات پذیریشان اثبات نسبتاً کوتاهی دارد. این نتایج شگفت انگیز درباره طول اثبات، در صفحه ۴۹٦ مقاله مشهور پریخ[4] [۱۹] می‌توانند یافت شوند. نظریه سازگاری شامل حساب پئانو را در نظر بگیرید. ما با محمولات (روابط) زیر سر و کار خواهیم داشت:

- $\mathrm{Prflen}(m,x)$ که در آن m طول اثبات جمله‌ای است که عدد گودلی آن x است. این رابطه تصمیم پذیر است، چون فقط یک تعداد متناهی از اثباتهای بطول m وجود دارند.
- $\mathrm{Prov}(x) \equiv \exists y\ \mathrm{Proof}(y,x)$ یعنی اثباتی از یک جمله وجود دارد که عدد گودلی آن x است.
- $\mathcal{E}_n(x) \equiv \neg(\exists m < n,\ \mathrm{Prflen}(m,x))$.

با بکار بردن لم قطری برای $\mathcal{E}_n(x)$ ، نقطه‌ی ثابت $\mathcal{C}_n$ را بما می دهد بطوریکه

$$\vdash \mathcal{C}_n \longleftrightarrow \mathcal{E}_n(\ulcorner\mathcal{C}_n\urcorner) \equiv \neg(\exists m < n :\ \mathrm{Prflen}(m,\ulcorner\mathcal{C}_n\urcorner)$$

به عبارت دیگر $\mathcal{C}_n$ می‌گوید: «من اثباتی کوچکتر از n ندارم».

---

[4] $R.Parikh$

اگر $\mathcal{C}_n$ غلط باشد، آنگاه اثبات کوچکتری از n برای $\mathcal{C}_n$ وجود دارد و در نتیجه، سیستم سازگار نیست.

به اثبات کوتاه زیر از $\mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n)$ توجه نمایید :

۱) اگر $\mathcal{C}_n$ هیچ اثباتی نداشته باشد، آنگاه $\mathcal{C}_n$ درست است.

۲) اگر $\mathcal{C}_n$ درست باشد، می‌توانیم تمام اثباتهای بطول کمتر از n را بررسی نموده و $\mathcal{C}_n$ را اثبات کنیم.

۳) از ۱ و ۲ داریم اگر $\mathcal{C}_n$ اثباتی نداشته باشد، پس می‌توانیم $\mathcal{C}_n$ را اثبات کنیم. یعنی $\neg\mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n) \to \mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n)$.

۴) $\therefore \mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n)$.

این اثبات می تواند در حساب پئانو در اثبات کاملاً کوتاهی فرمول بندی شود. برعکس، n آزادانه می‌تواند بزرگ انتخاب شود. پس ما $\mathcal{C}_n$ ای را داریم که اثبات خیلی بلندی دارد اما حقیقت اثبات پذیر بودن C_n، اثباتی کوتاه دارد. □

٦.۵ پارادکس لُب

ثابت می کنیم که هر جمله‌ی منطقی درست است. نمادگذاری استاندارد برای عدد گودلی $\mathcal{C}$ عبارت است از $\ulcorner\mathcal{C}\urcorner$. برعکس، اگر n عدد صحیحی باشد آنگاه wff متناظر با کد n را با $\llcorner n \lrcorner$ نمایش خواهیم داد. بوضوح داریم $\mathcal{C} = \llcorner\ulcorner\mathcal{C}\urcorner\lrcorner$.

فرض کنید $\mathcal{A}$ هر گزاره‌ای باشد. ثابت خواهیم نمود که آن همیشه درست است. با استفاده

از لم قطری روی

$$\mathcal{E}(x) \equiv \llcorner x \lrcorner \Rightarrow \mathcal{A}$$

یک نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$ عبارتست از $\mathcal{C}$، به طوری که

$$\vdash \mathcal{C} \longleftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner) \equiv (\llcorner \ulcorner \mathcal{C} \urcorner \lrcorner \Rightarrow \mathcal{A}) \equiv (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A})$$

لذا $\mathcal{C}$ معادل با $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$. فرض کنیم $\mathcal{C}$ درست باشد، پس $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ نیز درست خواهد بود. طبق قاعده وضع مقدم، $\mathcal{A}$ نیز باید درست باشد. بنابراین با فرض $\mathcal{C}$، $\mathcal{A}$ را ثابت کرده ایم. این دقیقاً مطلبی است که $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ بیان می‌کند. از اینرو آن درست است، همانطور که معادل آن $\mathcal{C}$ درست است، و لذا $\mathcal{A}$ درست است.

این شبیه به یک پارادکس واقعی است. ظاهراً پارادکس به این دلیل بوجود می آید که ما محدودیتی روی wff های $\mathcal{E}(x)$، برای مجاز بودن به استفاده از لم قطری قائل نشده‌ایم. پارادکس لُب مرتبط با پارادکس کوری است که نشان می‌دهد ما باید اصل انتزاع در اصل موضوعی نظریه مجموعه‌ها را محدود کنیم. در اینجا ما باید بروش مشابهی، لم قطری را محدود کنیم. محدود نمودن لم قطری ممکن است عجیب به نظر رسد زیرا اثبات ساختاری آن ظاهراً برای تمامی $\mathcal{E}(x)$ ها کاربرد دارد. اما باید همان طوری که اصل انتزاع را در نظریه مجموعه‌ها آشکارا محدود می‌کنیم، این کار را نیز انجام دهیم. دلیل واقعی حفظ این پارادکس این است که عمل $\llcorner x \lrcorner$ در این سیستم تعریف نشده است. از اینرو، ما مجاز به استفاده از آن در $\mathcal{E}(x)$ نیستیم. $\square$

اجازه دهید از بحث منطق به نظریه محاسبه پذیری رجوع کنیم. ما از زبان و مفهوم مرجع [۴] بهره می‌گیریم. پس تابع بازگشتی با کد m را با ϕ_m نمایش می‌دهیم.

قضیه S_1^1: برای تابع بازگشتی f، تابع بازگشتی مقدماتی ρ وجود دارد به طوری که یک به یک بوده و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\phi_e(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_{\rho(e,\bar{x})(\bar{y})}$$

برهان: به [۷] رجوع شود.

لم : فرض کنید مجموعه‌ی S، بازگشتی مقدماتی و تابع f محاسبه پذیر باشد، آنگاه تابع بازگشتی مقدماتی یک به یک g موجود است به طوری که

$i) \quad y \in S \longrightarrow \phi_{g(y)}(x) = f(x)$

$ii) \quad y \notin S \longrightarrow \phi_{g(y)} \uparrow$

برهان : به [۷] رجوع شود.

قضیه S_n^m: برای هر m و n تابع بازگشتی مقدماتی $(n+1)$ تایی S_n^m موجود است به طوری که

$$\phi_e(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_{S_n^m}(e, \bar{y})(\bar{x})$$

برهان: به [۷] رجوع شود.

قضیه ۵ (قضیه بازگشت):

فرض کنید که $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک تابع محاسبه پذیر تام باشد. یک عضو n_0 در $\mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\phi_{h(n_0)} = \phi_{n_0}$.

برهان. فرض کنید f مجموعه‌ای از توابع محاسبه پذیر یک متغیره باشد. نگاشت $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ را به صورت $f(m, n) \cong \phi_{\phi_n(m)}$ تعریف می‌کنیم. اگر $\phi_n(m)$ تعریف نشده باشد، آنگاه $f(m, n)$ نیز تعریف نشده است. با فرض اینکه عملگر $\Phi_h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ به صورت $\Phi_h(\phi_n) = \phi_{h(n)}$ تعریف

شده است، دیاگرام زیر را می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F} \arrow[d, "\Phi_h"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

تابع g به صورت $g(m) = \phi_{h(\phi_m(m))}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه S_n^m، تابع محاسبه پذیر تام $S(m)$ وجود دارد به طوری که $\phi_{h(\phi_m(m))} = \phi_{S(m)}$. چون S تام و محاسبه پذیر است، عدد t ای وجود دارد به طوری که $S(m) = \phi_t(m)$ و لذا g نمایش پذیر است زیرا $g(m) = \phi_{h(\phi_m(m))} = \phi_{S(m)} = \phi_{\phi_t(m)} = f(m,t)$. بنابراین نقطه ثابتی از Φ_h در $n_0 = \phi_{\phi_t(t)}$ وجود دارد. چرا که:

$$\begin{array}{rcll}
\phi_{h(\phi_t(t))} & = & \Phi_{h(\phi_t(t))} & \text{بنابر تعریف } \Phi_h \\
 & = & \Phi_h(f(t,t)) & \text{بنابر تعریف } f \\
 & = & g(t) & \text{بنابر تعریف } g \\
 & = & f(t,t) & \text{بنابر نمایش پذیری } g \\
 & = & \phi_{\phi_t(t)} & \text{بنابر تعریف } f
\end{array}$$

$\square$

۷.۵ قضیه رایس

هر ویژگی غیر بدیهی توابع محاسبه پذیر، تصمیم ناپذیر است. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیر مجموعه‌ی محض ناتهی از $\mathcal{F}$ باشد، که مجموعه‌ای از تمام توابع محاسبه پذیر یک متغیره است. فرض کنید $A = \{x|\phi_x \in \mathcal{A}\}$. نشان می‌دهیم A بازگشتی نیست. فرض کنید (فرض خلف) A بازگشتی باشد. بگیرید $a \in A$ و $b \notin A$ و تابع h را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{اگر } x \notin A \\ b & \text{اگر } x \in A. \end{cases}$$

پس داریم: «$x \in A$ اگر و تنها اگر $h(x) \notin A$». با استفاده از فرض، h محاسبه پذیر و تام است. از این رو با استفاده از قضیه بازگشت، یک عضو n_0 موجود است به طوری که $\phi_{h(n_0)} = \phi_{n_0}$. حال تناقض زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n_0 \in A &\iff h(n_0) \notin A && \text{بنابر تعریف } h \\ &\iff \phi_{h(n_0)} \notin \mathcal{A} && \text{بنابر تعریف } A \\ &\iff \phi_{n_0} \notin \mathcal{A} && \text{بنابر قضیه بازگشت} \\ &\iff n_0 \notin A && \text{بنابر تعریف } A \end{aligned}$$

□

حال صورت دیگری از اثبات قضیه رایس را ارائه می‌نماییم:

برهان.

حالت اول) فرض کنید $\emptyset \notin \mathcal{A}$، همچنین فرض کنید $\psi \in \mathcal{A}$، طبق لم داریم:

$i)\ y \in K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \in A$

$ii)\ y \notin K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \notin A$

$\therefore y \in K \longleftrightarrow g(y) \in A \Longrightarrow K \leqslant_m A$

از اینرو A بازگشتی نیست.

حالت دوم) فرض کنید $\emptyset \in \mathcal{A}$، همچنین فرض کنید $\psi \in \mathcal{A}$. طبق لم خواهیم داشت:

$i)\ y \in K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \notin A$

$ii)\ y \notin K \longrightarrow \phi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \in A$

$\therefore y \in \bar{K} \longleftrightarrow g(y) \in A \Longrightarrow \bar{K} \leqslant_m A$

پس در این حالت نیز A بازگشتی نیست. $\square$

۸.۵ ماشین های خودمولد وان نیومن

یک ماشین خود مولد[5]، تابع محاسبه پذیری است که همواره خروجی آن توصیفاتش است. ممکن است به نظر ساختن چنین ماشین خودمولدی غیر ممکن باشد زیرا به منظور ساختن چنین ماشینی، ما نیاز داریم تا توصیفاتش را بدانیم و از اینرو از قبل راجع به ماشین اطلاعاتی داریم. در هر حال، با کاربرد ساده‌ی قضیه بازگشت ما چنین ماشینی بدست می آوریم.

منظور ما از توصیف یک ماشین می‌تواند عدد گودلی تابع محاسبه‌پذیری باشد که آن ماشین محاسبه می‌کند. پس یک ماشین خودمولد، تابعی محاسبه پذیر با کد n مثل ϕ_n است به قسمی که برای تمام ورودی های x، $\phi_n(x) = n$.

[5] self-reproducing machine

فرض کنید $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تابع تصویری محاسبه پذیر $f(y,x) = y$ باشد. با استفاده از قضیه S_n^m، تابع محاسبه پذیر تام s موجود است به طوری که $\phi_{s(y)} = f(y,x) = y$. با استفاده از قضیه بازگشت، n ای موجود است به طوری که $\phi_{s(n)} = \phi_n$، پس خواهیم داشت $\phi_n(x) = \phi_{s(n)}(x) = f(n,x) = n$. □

حال می خواهیم ماشین تورینگی بسازیم که صرفنظر از ورودی، توصیفش را در خروجی چاپ کند. این ماشین را $SELF$ نامیده و جهت تشریح آن از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم : تابع محاسبه پذیر $q : \Sigma^* \to \Sigma^*$ وجود دارد به طوری که روی ورودی w، $q(w)$ توصیف ماشین تورینگ P_w بوده و w را در خروجی چاپ کند.

برهان.

قرار می‌دهیم $Q =$ روی ورودی w:

الف) ماشین تورینگ P_w را بساز طوری که:

$P_w =$ «روی هر ورودی w:

۱) ورودی را پاک کن.

۲) w را روی نوار بنویس.

۳) توقف کن.»

ب) $\langle P_w \rangle$ را در خروجی بنویس.

ماشین تورینگ $SELF$ از دو قسمت A و B تشکیل گردیده است. فرض می‌کنیم A و B دو زیر برنامه جدا هستند، که با هم $SELF$ را می‌سازند. هدف این است که $SELF$ در خروجی $\langle SELF \rangle$ را چاپ کند. ابتدا A اجرا می‌شود و به محض اتمام آن کنترل برنامه در اختیار B قرار می‌گیرد. عمل A چاپ نمودن توصیف B در خروجی است و عمل B چاپ توصیف A در

خروجی است. برای A از ماشین $P_{\langle B\rangle}$ که بوسیله‌ی $q(\langle B\rangle)$ توصیف می‌شود بهره می‌گیریم که نتیجه اعمال تابع q بر روی $\langle B\rangle$ است. پس A، ماشین تورینگی است که $\langle B\rangle$ را در خروجی چاپ می‌کند. اما B، A را از روی خروجی که توسط A تولید می‌شود، محاسبه می‌کند. همان طوری که ملاحظه نمودیم $\langle A\rangle$ به صورت $q(\langle B\rangle)$ تعریف شد. حال اگر B بتواند $\langle B\rangle$ را بدست آورد، با اعمال q بر روی آن می‌تواند $\langle A\rangle$ را بدست آورد. اما B چگونه $\langle B\rangle$ را بدست می‌آورد؟ در واقع $\langle B\rangle$ همان محتویات نوار پس از پایان یافتن A می‌باشد. پس B، $\langle A\rangle = q(\langle B\rangle)$ را محاسبه می‌کند و با ترکیب خروجیها $\langle SELF\rangle = \langle AB\rangle$ روی نوار نوشته خواهد شد. پس اگر $SELF$ را اجرا کنیم، اعمال زیر انجام خواهد شد.

۱) ابتدا A اجرا می‌شود و $\langle B\rangle$ را در خروجی می‌نویسد.

۲) B شروع می شود و $\langle B\rangle$ را بعنوان ورودی از روی نوار می‌خواند.

۳) B، $\langle A\rangle = q(\langle B\rangle)$ را محاسبه نموده و آن را با $\langle B\rangle$ ترکیب کرده و $\langle SELF\rangle$ حاصل می‌شود.

۴) B توصیف بدست آمده را چاپ کرده و متوقف می‌شود.

قضیه بازگشتی، تکنیک بکار رفته در ساختن $SELF$ را توسعه می‌دهد به طوری که هر برنامه بتواند توصیفش را بدست آورده از آن در محاسباتش استفاده کند.

قضیه بازگشتی: فرض کنید T ماشین تورینگی است که تابع $t : \Sigma^* \times \Sigma^*$ را محاسبه می‌کند. ماشین تورینگ Rای وجود دارد که تابع $r : \Sigma^* \times \Sigma^*$ را محاسبه می کند به طوری که برای هر w، $r(w) = t(\langle R\rangle, w)$.

برهان.

همانند $SELF$، ماشین تورینگ R را از سه قسمت A، B و T می‌سازیم. A ماشین تورینگ $P_{\langle BT\rangle}$ است که با $q(\langle BT\rangle)$ توصیف می‌شود. برای حفظ کردن ورودی w، q را طوری طراحی می‌کنیم که $P_{\langle BT\rangle}$، خروجیش را بعد از محتویات نوار بنویسد. بعد اجرای A، نوار شامل

$w\langle BT\rangle$ خواهد بود. زیر برنامه‌ی B نوار را بررسی نموده و با اعمال q بر روی آن $\langle A\rangle$ را بدست می آورد و نیز با ترکیب نتیجه با $\langle BT\rangle$، $\langle R\rangle = \langle ABT\rangle$ بدست می آید و نهایتاً رشته‌ی $\langle R, w\rangle$ را روی نوار نوشته و کنترل برنامه را در اختیار T قرار می‌دهد. $\square$

قضیه بازگشتی ماشینهای تورینگی که می‌توانند توصیف خود را بدست آورند و در محاسبات خود از آن استفاده کنند، را توصیف می‌کند. برای مثال ممکن است ماشین M، $\langle M\rangle$ را فقط در خروجی بنویسد که همان ماشین تورینگ $SELF$ خواهد بود یا ممکن است تعداد حالات $\langle M\rangle$ را بشمارد و یا در صورت امکان $\langle M\rangle$ را شبیه سازی کند. برای نشان دادن این مطلب، ماشین $SELF$ را با استفاده از قضیه بازگشتی شرح می‌دهیم.

$SELF =$ «روی هر ورودی w:

۱) با استفاده از قضیه بازگشتی توصیف خود را ($\langle SELF\rangle$)، بگیر.

۲) $\langle SELF\rangle$ را چاپ کن».

قضیه بازگشتی چگونگی ساختار بدست آوردن توصیف خود را نمایش می دهد. به منظور تولید ماشین $SELF$، نخست ماشین تورینگ T را ارائه می‌دهیم.

$T =$ «روی ورودی $\langle M, w\rangle$:

۱) $\langle M\rangle$ را چاپ کن».

ماشین تورینگ T، توصیفی از یک ماشین تورینگ M و رشته w به عنوان ورودی را دریافت کرده و توصیف M را چاپ می‌کند. پس قضیه بازگشت نشان می‌دهد چگونه می‌توانیم یک ماشین تورینگ R را روی ورودی w بدست آوریم که نظیر T روی ورودی $\langle R, w\rangle$ عمل کند. بنابراین R توصیف R را چاپ می‌کند، دقیقاً آنچه که مستلزم ماشین $SELF$ است.

ویروس کامپیوتری، یک برنامه کامپیوتری است که به منظور انتشار خود در میان کامپیوترها طراحی شده است. ویروسهای کامپیوتری زمانی که به تنهایی بعنوان قسمتی از کد قرار می‌گیرند،

غیرفعالند اما زمانی که در کامپیوتر میزبان قرار می‌گیرند بدین ترتیب آن را آلوده می‌کنند. آنها می توانند کپی‌هایی از خودشان را به دیگر ماشین های قابل دسترس انتقال دهند. برنامه های صوتی و تصویری زیادی می‌توانند ویروس ها را از طریق اینترنت و یا حافظه‌های جانبی انتقال دهند. یک ویروس جهت انجام دادن وظیفه خودتکراری[6] اولیه‌اش، دارای ساختار توصیف شده در برهان قضیه بازگشت است. برای توضیح بیشتر در این خصوص به مرجع [۲۶] رجوع شود.

[6] self-replicaton

فصل ٦

جمع بندی و طرح مسائل باز

در این فصل ما لیست وار به بیان برخی از موارد و مباحثی که در تعمیم و ادامه مباحث این پایان نامه در زمینه های مختلف ریاضی می‌توان پرداخت، اشاره می‌کنیم. ضمناً به عنوان نمونه صرفاً به شرح و بیان مختصر چند نمونه از این موارد می‌پردازیم.

قضیه اصلی کانتور، می‌تواند بیشتر تعمیم یابد، به طوری که حتی پدیده های دیگری نیز می‌توانند توسط این قضیه شامل شوند. مثلاً اگر دو مجموعه‌ی Y و Y' را داشته باشیم و یک تابع پوشا از Y به Y' وجود داشته باشد، چه روی خواهد داد؟ این قضیه درباره‌ی رابطه میان $f : T \times T \to Y$ و $f' : T \times T \to Y'$ چه می‌گوید؟ ما باید مفهوم تحویل یک پارادکس به پارادکسی دیگر را بدست آوریم.

بجای صحبت در خصوص مجموعه‌ها و توابع، شاید ساده تر است درباره‌ی ترتیب جزیی و نگاشت های حافظ ترتیب صحبت کنیم. با این تعمیم، ممکن است ما نه تنها قادر باشیم تا قضایای نقطه‌ی ثابت را بدست آوریم، بلکه کوچکترین نقطه‌ی ثابت را نیز داشته باشیم. قضایای نقطه ثابت ساده‌ی زیادی وجود دارند از جمله برای نگاشت های پیوسته cpo و دامنه‌های اسکات و تعریف کریپکی از درستی [۸] و قضیه کناستر– تارسکی.

باید توجه بیشتری را به پارادکس های ریچارد و لُب معطوف کنیم. اگر چه محدودیت هایشان را بیان نموده‌ایم، لیکن پارادکس ها حفظ می‌شوند. شاید آنها را درست فرمول بندی ننمودیم یا شاید مشکلات ذاتی در مورد این پارادکس ها وجود دارد.

قضایای نقطه ثابت زیادی در کل منطق و ریاضیات وجود دارد که از انواع توضیح داده شده در فصل ۴، نیستند. آیا می‌توانیم راجع به برخی از ویژگیهای قضایای نقطه ثابت که خودارجاعی اند، بحث نماییم؟

بنظر می رسد که مولفه‌ی کلیدی لم قطری، وجود یک تابع بازگشتی $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ است که

برای تمامی $\mathcal{B}(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$D(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) = \ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner$$

بطور مشابه، به منظور داشتن قضیه بازگشت نیاز به قضیه S_n^m داریم. این دو ویژگی از سیستم‌ها، کلیدی برای این حقیقت اند که سیستم ها می‌توانند درباره‌ی خودشان صحبت کنند. آیا این دو ویژگی به هم مربوطند؟ سئوال مهمتر اینکه آیا می‌توانیم ویژگیهای کلیدی دیگری در سیستم ها بیابیم که خودارجاعی را ممکن سازد؟

در بخش مقدمه‌ی این پایان نامه در خصوص فقدان یک تابع پوشای $T \to Y^T$ بحث نمودیم و مطرح گردید که Y ممکن است بعنوان مقادیر درستی یا ویژگیهای اشیای T در نظر گرفته شود. آیا ما می‌توانیم ویژگی بهتری برای Y بیابیم؟ در فصل ۵ درباره‌ی تابع پوشای $Lind^1 \to (Lind^0)^{Lind^1}$ صحبت شد که $Lind^i$ در آن فرمول کلاسهای لیندنبام با i تا متغیر آزاد است. از چه نظر $Lind^0$ مقدار درستی یا ویژگیهای $Lind^1$ است؟ سپس ما به تابع پوشای $\mathbb{N} \to \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ پرداختیم که در آن $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از توابع محاسبه پذیر یکانی است. ما از این تابع پوشا برای اثبات قضیه‌ی بازگشت استفاده کردیم.

با ارائه نمونه های زیادی از قضایا، این زمینه را بطور وسیعی مورد بحث قرار دادیم. پدیده‌های پارادکسی و قضایای نقطه ثابت بیشتری وجود دارد که ما درباره‌ی آن صحبت نکرده‌ایم. برخی از آنها ممکن است برای طرح ما جوابگو باشند و برخی نه.

• پارادکس های معنایی زیادی وجود دارد که ما بحث نکردیم. همانطور که در فصل یک بیان نمودیم، پارادکس بری[1] می‌خواهد تا به این جمله توجه کنید که « فرض کنید که x نخستین عددی است که نمی تواند بوسیله هیچ جمله‌ای با کمتر از ۲۰۰ کاراکتر توصیف شود.» ما چنین

[1] Berry paradox

عددی را توصیف کردیم.

• مسأله کوروکودیل یک پارادکس قدیمی است که با زیرکی گمراه‌کننده‌ای یک پارادکس خودارجاعی است. یک کروکودیل کودکی را می‌رباید و مادر کودک خواهان بازگشت کودک دلبندش است. کروکودیل پاسخ می‌دهد که «کودکت را باز خواهم گرداند اگر وتنها اگر بدرستی حدس بزنی که من کودکت را باز خواهم گرداند یا نه؟» مادر با زیرکی پاسخ می‌دهد که او کودک را نگه خواهد داشت. یک کروکودیل درستکار چه کاری انجام می‌دهد؟! کوروکودیل اگر کودک را نگهدارد و به مادرش بازنگرداند در این صورت مادر به درستی پاسخ گفته است و بایستی کودک را به مادرش بازگرداند. همچنین اگر کودک را به مادرش بازگرداند، در این صورت مادر پاسخ درستی نداده و بایستی کودک را نگهدارد. و این تناقض است.

• عقیده بر این است که همه پارادکس ها از بین می‌روند اگر جمله خودارجاعی وجود نداشته باشد. پارادکس دروغگوی غیر خودارجاعی یابلو[2] برای تأثیر بر این فرضیه فرمول بندی شده است. یک عبارت متوالی وجود دارد بطوریکه هیچ یک از آنها تا بحال به خودشان رجوع نکرده‌اند و با این وجود آنها هم درست و هم غلط‌اند. به دنباله زیر توجه می‌کنیم
(S_i) : بازای $(k > i)$، S_k غلط است

فرض کنید S_n برای یک n طبیعی درست باشد. پس S_{n+1} غلط است، چون S_n ادعای نادرستی همه S_k ها برای $k > n$ را می‌کند. با توجه به اینکه همه عبارات S_k برای $k > n+1$ غلط اند، S_{n+1} درست است که یک تناقض است. بنابراین با مقایسه، S_n بازای تمامی n ها غلط است. این بدین معنی است که S_1 درست است و S_2 درست است و غیره. بار دیگر یک تناقض داریم.

[2] Yablo's Non-self-referential Liar's Paradox

• پارادکس معرفت شناختی برندن بروگر [3] [۳] به وضعیتی توجه می‌کند که در آن «سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد دارد که سارا اعتقاد دارد که علی باور غلطی درباره سارا دارد.»

حال از خودتان بپرسید : «آیا سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد غلطی دربارهٔ سارا دارد؟» با تفکر بیشتر می‌توانیم ملاحظه کنیم که این یک وضعیت پارادکسی است.

• پارادکس کوری، پارادکسی درباره منطق و نظریه مجموعه هاست که شباهت زیادی به پارادکس لُب دارد.

• تابع اکرمن [4] یک تابع بازگشتی مقدماتی نیست. اغلب این جمله شنیده می‌شود که تابع اکرمن از قطری سازی توابع بازگشتی مقدماتی نتیجه شده است.

تابع اکرمن یک تابع دو متغیره $A(n,x)$ است که محاسبه پذیر بوده ولی بازگشتی مقدماتی نیست.

$A(0,x) = x+1$

$A(n,x) = A(n-1,1)$

$A(n,x) = A(n-1, A(n,x-1))$

می‌توان نشان داد که تابع قطری $A(x,x)$، تابع بازگشتی مقدماتی نیست و به هر تابع بازگشتی مقدماتی تسلط دارد.(ر.ک. [۱۲]) همچنین می‌توان نتیجه گرفت که روش استقرایی که برای تعریف $A(n,x)$ استفاده شد قویتر از بازگشتی مقدماتی است.

• نتیجه مشهور پاریس – هرینگتون [5] بیان می کند که قضایای تعمیم یافته رمزی [6] نمی توانند در

[3] Brandenburger's Epistemic Paradox

[4] Ackermann

[5] Paris-Harrington

[6] Ramsey

حساب پئانو اثبات شوند. کاناموری و مک آلون [۱۳] رابطه ای را با تابع اکرمن ایجاد کرده‌اند. همان طور که تابع اکرمن خارج از توابع بازگشتی مقدماتی قرار می‌گیرد. بنابراین قضیه تعمیم یافته رمزی نیز به طور قطری خارج از حساب پئانو قرار می‌گیرد. هر دوی اینها واقعاً بیانگر محدودیت سیستمی هستند.

نمونه های بسیار دیگری از قضیه نقطه ثابت وجود دارد که ممکن است در طرح ما گنجانده شوند.

• قضیه شکاف بورودین[7] یک نوع قضیه نقطه ثابت در نظریه پیچیدگی است که ممکن است در خصوص طرح ما صادق باشد.

• مجدداً قضیه کناستر– تارسکی[8] را درباره توابع یکنوا مابین ترتیب های جزئی یادآور می‌شویم. قضیه پر کاربرد دیگری نیز راجع به نقاط ثابت توابع پیوستار میان cpo ها وجود دارد.

• بعنوان آخرین مورد خودارجاعی، تمایل داریم که قضیه صدق کریپکی[9] را یادآوری کنیم که او برای اجتناب از پارادکس های خودارجاعی استفاده کرد. آن ماهیتاً یک نوع قضیه نقطه ثابت می‌باشد. واقعاً جالب خواهد بود اگر بتوانیم این نظریه را با همان روشی که با پارادکس هایمان برخورد کردیم در زبان خودمان (نقاط ثابت و دیاگرام ها) فرمول بندی کنیم.

• قضیه نقطه ثابت براور[10] یا قضیه مقدار متوسط ساده.

• قضیه تعادل نش[11] و بسیاری از تعمیم های آن از نظریه بازی.

---

[7] Borodin's Gap Theorem

[8] Knaster-Tarski

[9] kripke

[10] Brouwer

[11] Nash's equilibria

چندین قضیه از ریاضیات حقیقی وجود دارد که از طریق اثبات های قطری ثابت شده‌اند. ما ممکن است قادر به گنجاندن آنها در زبانمان باشیم.

- قضیه رسته بئر[12] درباره فضای متریک.
- قضیه مونتل[13] در نظریه توابع مختلط.
- قضیه اسکولی[14] در توپولوژی.
- قضیه هلی[15] درباره محدودیت های توزیع.

ایده های زیر مبهم تر از موارد بالا هستند:

- قضیه دوم ناتمامیت گودل درباره‌ی اثبات ناپذیری در سازگاری حساب در خودش. این قضیه معمولاً به عنوان تالی نخستین قضیه ناتمامیت ثابت می‌شود. به هر حال، کرایسل[16]، یک اثبات نظریه مدلی دارد که از روش قطری استفاده می‌کند.(ر.ک. ص ۸٦۰ [۲]) این اثبات بنظر می‌رسد که برای طرحمان جوابگو می‌باشد.
- بسیاری از مباحث نظریه اطلاعات الگوریتمی چایتین[17] بنظر می رسد برای طرح ما مناسب باشند.
- ما در مورد نخستین قضیه ناتمامیت گودل بحث کردیم که با استفاده از زبان مقدماتی اثبات نمود حساب کاملاً نمی‌تواند درباره‌ی اثبات پذیری خودش صحبت کند. درباره قضیه‌ی ناتمامیت گودل چه معیاری وجود دارد؟ سیستم های ضعیف خاص، می‌توانند کاملاً از اثبات

[12] Baire's Category

[13] Montel

[14] Ascoli

[15] Helly

[16] Kreisal

[17] Chaitin

پذیری خودشان صحبت کنند. آیا این قضیه می‌تواند به عنوان برخی از انواع قضایای نقطه ثابت بیان شود؟

مراجع

[1] T. Baker, and J. Gill, and R. Solovay, Relativizations of the P=?NP question, Siam Journal on Computing, vol. 4 (1975), no. 4, pp. 431-442.

[2] J. Barwise (editor), Handbook of mathematical logic, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 90.

[3] A. Brandenburger, The power of paradox, Int Journal of Game Theory, vol. 35 (2007), no. 3, pp. 465-492.

[4] N. Cutland, Computability, An introduction to recursive function theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[5] M. Clark, Paradoxes from A to Z, second ed., Routledge, NY, 2007.

[6] G. Chaitin, The Berry paradox, Complexity, vol. 1 (1995), no. 1, pp. 26-30.

[7] H. B. Enderton, Computability theory, Lecture Notes (2009), available at http://www.math.ucla.edu/∼hbe/comp/.

[8] M. Fitting, Nots on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth, Notre Dome Journal of Formal Logic, vol. 27 (1986), no. 1, pp. 75-88.

[9] A. Heller, An existence theorem for recursion categories, The Journal of Symbolic Logic, vol. 55 (1990), no. 1, pp. 1252-1268.

[10] J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley Series in computer Science, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979.

[11] H. Huwig, and A. Poigne, A note on inconsistencies caused by fixpoints in a Cartesian closed category, Theoretical Computer Science, vol. 73 (1990), no. 1, pp. 101-112.

[12] S. Hedman, A First Course in Logic, second ed., Oxford University Press, NY, 2006.

[13] A. Kanamori, and K. Mcaloon, On Gödel incompletteness and finite combinatorics, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 33 (1987), no. 1, pp. 23-41.

[14] S. Lavine, Understanding the infinite, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1994.

[15] F. W. Lawvere, Diagonal arguments and cartesian closed categories, Category theory, homology theory and their applications, Springer, Berlin, 1969, pp. 134-145.

[16] F. W. Lawvere, and R. Rosebrugh, Sets for mathematics, Cambridge University Press, 2003.

[17] F. W. Lawvere, and S. H. Schanuel, Conceptual mathematics, A first introduction to categories, With the assistance of Emilio Faro, Fatima Fenaroli and Dani Lawvere, Buffalo Workshop Press, Buffalo, NY, 1991.

[18] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol.5, Springer-Verlage, New York, 1998.

[19] Y. I. Manin, Classical computing, qantum computing, and Shor's factoring algorithm, Asterisque, (2000), no. 266, pp. 375-404, Seminaire Bourbaki, vol. 1998/99.

[20] E. Mendelson, Introduction to mathematical logic, fourth ed. Chapman Hall, London, 1997.

[21] P. S. Mulry, Categorical fixed point semantics, Theoretical Cpmputer Science, vol. 70 (1990), no. 1, pp. 85-97.

[22] R. Parikh, Existence and feasibility in arithmetic, The Journal of Symbolic Logic, vol. 36 (1971), pp. 494-508.

[23] D. Pavlovic, On the sructure of paradoxes, Archive for Mathematical Logic, vol. 31 (1992), no. 6, pp. 397-406.

[24] A. M. Pitts, and P. Taylor, A note on Russell's paradox in locally Cartesian closed categories, Studia Logica, vol. 48 (1989), no. 3, pp. 377-387.

[25] R. Rucker, Infinity and the mind: The science and philosophy of the infinite, Birkhauser, Boston, Mass. , 1982.

[26] M. Sipser, Introduction to the theory of computation, second ed., Thomson, Boston, 2006.

[27] N. S. Yanofsky, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulleting of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386.

[۲۸] ضیاء موحد، از ارسطو تا گودل، مجموعه مقاله های فلسفی – منطقی، انتشارات هرمس، ۱۳۸۲.

واژه‌نامه‌ی تخصصی فارسی به انگلیسی

اثبات پذیری .... Provability
ارزش درستی .... Truth-Values
آموزشی .... Pedagogical
بحث کردن .... Deal with
بی نهایت .... Infinite
پیچیدگی .... Complexity
تباهیده .... Degenerate
تعریف پذیری .... Definability
تناقض نما .... Paradox
جهانی .... Universal
خودارجاعی .... Self-Referential
خودمولد .... Self-Reproducing
خود نامصداق .... Heterological
راستگویی .... Truthfulness
رسته .... Category
شمارش .... Enumeration

صریحاً .... Explicitly

صوری سازی .... Formalism

عبارت .... Statement

عکس نقیض .... Contrapositive

غیر قابل استناد .... Impredicable

قطری .... Diagonal

قطعی .... Deterministic

گردایه .... Collection

مثال نقض .... Counter example

مجزا .... Disjoint

محاسبه پذیری .... Computability

مسأله توقف .... Halting Problem

مشخصه .... Characteristic

معنایی .... Semantics

ناتمامیت .... Incompleteness

نارسا .... Defective

ناسازگار .... Inconsistent

نفی .... Negation

نقاط ثابت .... Fixed Pionts

هم ارز .... Equivalent

واژه‌نامه‌ی تخصصی انگلیسی به فارسی

Category	رسته
Characteristic	مشخصه
Collection	گردایه
Complexity	پیچیدگی
Computability	محاسبه پذیری
Contrapositive	عکس نقیض
Counter example	مثال نقض
Definability	تعریف پذیری
Degenerate	تباهیده
Deterministic	قطعی
Diagonal	قطری
Deal with	بحث کردن
Defective	نارسا
Disjoint	مجزا
Enumeration	شمارش
Equivalent	هم ارز

صریحاً .... Explicitly
نقاط ثابت .... Fixed Pionts
صورتگرایی، صوری سازی .... Formalism
مسأله توقف .... Halting Problem
خود نامصداق .... Heterological
غیر قابل استناد .... Impredicable
ناتمامیت .... Incompleteness
ناسازگار .... Inconsistent
بی نهایت .... Infinite
نفی .... Negation
تناقض نما، دروغنما .... Paradox
آموزشی .... Pedagogical
اثبات پذیری .... Provability
خودارجاعی .... Self-Referential
خودمولد .... Self-Reproducing
معنایی .... Semantics
عبارت .... Statement
ارزش درستی .... Truth-Values
راستگویی، درستنمایی .... Truthfulness
جهانی .... Universal

Surname: Abedini **Name:** Mahdi

Title: A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points

Supervisor: S. Salehi

Advisor: J. S. Eivazloo

Degree: Master of Science **Major:** Pure Mathematics
Field: Mathematical Logic **University:** Tabriz

Faculty: Mathematical Sciences **Graduation Date:** 2010 **Number of Pages:**93

Keywords: Self-Referential Paradoxes; Incompleteness; Fixed Points

Abstract

This thesis is based on the following paper:
N. S. Yanofsky, A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, The Bulletine of Symbolic Logic, vol. 9 (2003), no. 3, pp. 362-386.
In 1906 Bertrand Russell published a paper in which he showed that all known set-theoretic paradoxes had a common form. In 1969 F. W. Lawvere used the language of category theory to achieve a radically different, and deeper, unificaion, one embracing not only the set-theoretic paradoxes but incompleteness phenomena as well. Lawvere showed how Cartesian closed categories can be used to give a common form to Cantor's theorem concerning the size of power sets, Russell's paradox, Tarski's undefinability of truth and Gödel's first incompleteness theorem.
In the present thesis, which is of a usefully expository character, Lawvere's ideas are presented and extended using straightforward set-theoretic laanguage. It is shown how self-referential paradoxes, incompleteness, and fixed-point theorems all emerge from a single generalized form of Cantor's theorem. We also have extended Lawvere's analysis to embrace the Liar paradox, the paradoxes of Grelling and Richard, Turing's halting problem, an oracle version of the P=?NP problem, time travel paradoxes, Parikh sentences, Löb's paradox, and Rice's theorem.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

A DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points

Supervisor
S. Salehi

Advisor
J. S. Eivazloo

by

© Mahdi Abedini

2010